УДК 534-21:537.226.86

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ П’ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ НА ОСНОВІ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ І СПЛАЙН АПРОКСИМАЦІЙ

Безверхий О.І., д.ф.-м-.н., проф.,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ
Григор’єва Л. О., к.ф.-м.н., доц.
Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ

П'єзоелектричні тіла обертання є широко застосовуваними електромеханічними перетворювачами при гармонічних та імпульсних електричних і механічних збуреннях. В даній роботі запропоновано методику дослідження динамічного осесиметричного електромеханічного стану п’єзокерамічних тіл обертання при гармонічному нванатаженні електричним потенціалом та реалізовано чисельний спосіб дослідження вимушених коливань та визначення власних частот та форм п’єзокерамічних радіально поляризованих циліндрів обмеженої довжини.

Запропонований метод розв’язання задач електропружності базується на принципі Гамільтона-Остроградського. Чисельні методи, щобазуються на варіаційних принципах, мають ряд переваг над безпосередньою різницевою апроксимацією диференціальних рівнянь коливань: використовується більш низький порядок похідних, зникають протиріччя в кутових точках області, матриця розв’язуючої системи має симетричну стрічкову структуру.

Вихідний функціонал, що описує осесиметричні коливання п’єзокерамічних тіл обертання, має вигляд [1]

$$A(u,\varphi)=\frac{1}{2}\int_V\left(u_{i,j}c^E_{ijkl}u_{k,l}+2\varphi_{,k}e_{kij}u_{i,j}-\varphi_{,k}\varepsilon^S_{kl}\varphi_{,l}\right)dV-\int_S p_iu_idS\,,$$

$$i,j,k,l=1,2,3. \quad (1)$$

Для підвищення точності розрахунків в функціоналі (1) пропонується по одній координаті застосувати сплайн-апроксимацію, а по іншій чисельно розв’язати систему звичайних диференціальних рівнянь. Для п’єзокерамічного радіально поляризованого циліндра представимо шукані функції на інтервалах $z_i < z < z_{i+1}$ у вигляді сплайна першого порядку, який являється кусково-неперервною функцією

$$f(r,z)=f_i(i-\xi_i)+f_{i+1}\xi_i\,,\qquad \xi_i=(z-z_i)/(z_{i+1}-z_i)\,,$$

$$h_i=z_{i+1}-z_i\,,\qquad i=0,1,...,N-1. \quad (2)$$

Функціонал (1) при переході до нових змінних (2) набуде вигляду

$$A = \int\limits_{r_0}^{r_k}\int\limits_0^L J dz dr = \int\limits_{r_0}^{r_k}\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{z_i}^{z_{i+1}} J dz dr = \int\limits_{r_0}^{r_k}\sum_{i=0}^{N-1} h_i \int\limits_0^1 J_i d\xi dr = \int\limits_{r_0}^{r_k}\sum_{i=0}^{N-1} F_i dr \,. \quad (3)$$

Система рівнянь для знаходження переміщень і електричного потенціалу

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_{ki}} - \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial u'_{ki}}\right)\sum_{i=0}^{N-1} F_i = F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = 0\,, \;\; u_k = u_r,\, u_z,\, \varphi\,. \quad (4)$$

Будемо шукати розв’язок в вигляді
$\mathbf{Y} = \{u_{r,1},...,u_{r,n,}\, u_{z,1},...,u_{z,n}, \varphi_1,...,\varphi_n\}$ $(n = N-1)$. Система рівнянь (4) приймає вигляд

$$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial r^2} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} + \mathbf{BY} = 0\,. \quad (5)$$

Матриці $\mathbf{M}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ мають стрічкову форму. Отримана система розв’язується методом прогонки або методом дискретної ортогоналізації при заданих на циліндричних поверхнях тіла переміщеннях або напруженнях. Навантаження задається в вигляді заданої на електродованих циліндричних поверхнях різниці потенціалів, що змінюється по гармонічному закону з частотою ω. Досліджено вимушені коливання циліндра з вільними від механічних навантажень циліндричними поверхнями та закороченими мембранами на торцях. Шляхом зміни ω визначено власні частоти циліндра. Розв’язано тестову задачу та доведено співпадання отриманих результатів з розв’язком задачі на основі тригонометричних рядів [2].

[1]. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.

[2]. *Болкисев А.М., Шульга Н.А.* Вынужденные колебания пьезокерамического полого цилиндра (радиальная поляризация) // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 5. – С. 118-121.

O.I. Bezverkhy , L.O. Grigoryeva

NUMERICAL METHODS OF RESEARCH OF PIEZOCERAMIC ROTATION BODIES HARMONIC VIBRATIONS BASED ON VARIATIONAL PRINCIPLE AND SPLINE APPROXIMATIONS

There are proposed the technique of research of dynamic electromechanical axisymmetric state piezoceramic bodies of revolution at harmonic electric potential loads based on the principle of Hamilton-Ostrogradskiy and spline approximations on one of the spatial coordinates. There are realised numerical method of studying of forced oscillations and determining of natural frequencies and forms of radially polarized piezoceramic limited length cylinders. Investigated the forced oscillation of the cylinder with free from mechanical stresses cylindrical surfaces and shorted membranes at the ends and identified natural frequencies of cylinder.