

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНЬ У СТРИЖНЯХ ПРИ КРУЧЕННІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ КОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Максимович О.В, д.т.н., проф.

Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

Максимович Я.В, к.т.н., доцент

Луцький інститут розвитку людини університету "Україна", м. Луцьк

Іллюшин О.В., аспірант

Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

Багнюк Н.В, к.т.н., доцент

Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

Розроблено підхід до розрахунку напружень у стрижнях при крученні, який базується на методі конформного відображення, запропонованого Мухелішвілі. Комплексну функцію кручення, через яку визначаються напруження, записано в рядах, коефіцієнти яких у явному вигляді виражено через коефіцієнти розвинення в ряд конформно відображувальної функції. Для випадку повільно збіжних рядів запропоновано рекурентні співвідношення, які дозволяють мінімізувати обсяг обчислень при виборі довільної кількості членів ряду. Розроблений підхід дозволяє істотно спростити процес розрахунків за рахунок використання створених у комп'ютерних математичних системах процедур для дій над поліномами.

Віднесемо стрижень до системи координат $Oxyz$ так, що вісь Oz напрямлена паралельно твірній, осі Ox і Oy – вздовж головних осей перерізу, початок координат розмістимо в закріпленому кінці. Позначимо область, яку займає переріз стрижня через S . Приймемо, що відома функція $z = \omega(\zeta)$, яка відображає конформно область S в площині (x,y) на одиничний круг в допоміжній площині ζ . Тоді комплексна функція кручення Мухелішвілі $f(\zeta)$ в площині ζ визначається за формулою

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (1)$$

де γ – коло одиничного радіуса, σ – комплексна змінна на інтегрування, яка лежить на цьому колі.

Напруження через цю функцію знаходяться так

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\alpha i \left(\frac{f'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \overline{\omega(\zeta)} \right), \quad (2)$$

де α – кут, на який повертається переріз стрижня, G – модуль зсуву.

Наведемо спосіб обчислення інтегралів, коли конформно

відображувальна функція є поліномом довільного ступеня, тобто

$$\omega(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \dots + c_N\zeta^N, \quad (7)$$

де c_n – комплексні сталі.

Тоді коефіцієнти розкладу в ряд функції $f(\zeta) = \sum_{n=0}^N a_n \zeta^n$ будуть

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_N \\ c_1 & \dots & c_N & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{c_0} \\ \overline{c_1} \\ \dots \\ \overline{c_N} \end{pmatrix}.$$

Позначимо функцію $f(\zeta)$ при виборі в відображальній функції $\omega(\zeta)$ M членів через $f_M(\zeta)$ та коефіцієнти розкладу її в ряд через $a_j^{(M)}$, $j = 0, \dots, M$. Тоді для цих коефіцієнтів справедлива рекурентна формула

$$a_j^{(M+1)} = a_j^{(M)} + c_{M+1} \overline{c_{M-j+1}}, \quad \text{при } j = 0, \dots, M; \quad a_{M+1}^{(M+1)} = c_{M+1} \overline{c_0},$$

причому $a_0^{(0)} = c_0 \overline{c_0}$.

Наведені приклади застосування підходу до розрахунку напружень у стрижнях різної форми, в тому числі й з крайовими тріщинами. Зокрема, розглянуто стрижень, поперечний переріз в якого є круг із шістьма виступами. Форма перерізу та віднесені до GaR напруження на межі стрижня наведені на рис. 1.

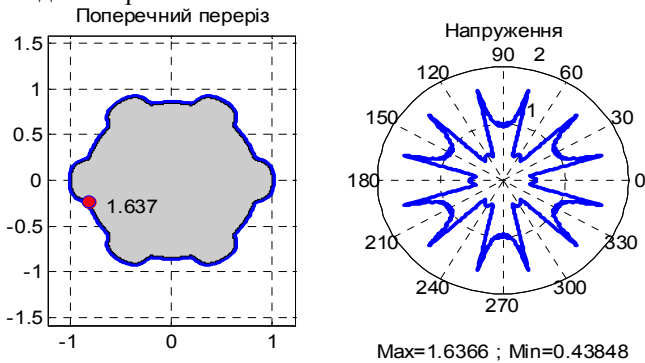


Рис. 1. Переріз та напруження на межі стрижня

NUMERICAL ANALYSIS STRESSES IN TORSIONAL ROD BASED ON THE METHOD OF CONFORMAL MAPPING

The approach to the calculation of stresses in torsional rods based on conformal mapping method proposed Mushelishvili. The developed approach can significantly simplify the calculation by the use of computer generated mathematical systems procedures for operations on polynomials.