УДК 539.3

ПЛОСКОПОЛЯРИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ В РЕГУЛЯРНО–СЛОИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИИ НА ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА СВОЙСТВ

В.В. Левченко, канд. физ.-мат. наук
Институт Механики НАНУ имени С. П. Тимошенко, Киев, Украина,
e-mail: ylvv@ukr.net

Исследованию особенностей распространения волн различной физической природы в периодических структурах посвящено большое количество работ [1-5]. Основными проблемами, которым посвящены эти работы, являлось изучение условий существования объемных волн и зонного спектра их распространения. Исследование дисперсионных свойств объёмных волн в регулярно-слоистых средах в настоящее время является открытым [1,3], поэтому настоящая работа посвящена этой проблеме.

Для исследования объемных плоскополяризованных волн рассмотрим слоистую среду, которая образована периодическим повторением порождающего пакета из двух изотропных слоев. Свойства слоев характеризуются параметрами Ламе λ_q, μ_q, плотностью ρ_q и толщиной h_q ($q = 1{,}2$). На границах раздела свойств выполняются условия идеального проскальзывания. Среду отнесена к декартовой системе координат в предположении, что ось oz перпендикулярна границам раздела слоев. Гармоническая плоскополяризованная волна распространяется вдоль оси ox, а вектор смещений имеет вид $\vec{u} = \{u(x,z,t);\, 0;\, w(x,z,t)\}$. Компоненты u и w удовлетворяют волновыым уравнениям [3,4]

Решение волновых уравнений в слоях следует искать в виде [3]

$$
\begin{gathered}
w(x,z) = \Omega_p[-A^{(1)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(3)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q})] + \\
k[A^{(2)}_{2(n-1)+qq}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(4)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q})]; \\
\sigma_{zz}(x,z) = \mu(2k^2 - k_s^2)[A^{(1)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(3)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q})] + \\
2\mu k\Omega_s[A^{(2)}_{co}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q}) - A^{(4)}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q})]; \\
\sigma_{zx}(x,z) = 2\mu k\Omega_p[-A^{(1)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(3)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_{n,q})] + \\
\mu(2k^2 - k_s^2)[A^{(2)}_{2(n-1)+q}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q}) + A^{(4)}_{2(n-1)+q}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_{n,q})].
\end{gathered}
\tag{1}
$$

На поверхностях раздела свойств выполняются граничные условия

$$
\sigma_z(x, \bar{z}_{n,q} - 0) = \sigma_z(x, \bar{z}_{n,q} + 0);\; w(x, \bar{z}_{n,q} - 0) = w(x, \bar{z}_{n,q} + 0) \tag{2}
$$

и условия, вытекающие из требования идеального проскальзывания,

$$\sigma_{zx}(x,\bar{z}_{nq})=0. \qquad \bar{z}_{n,q}=\bar{z}-(n-1)h+\sum_{i=1}^{q}h_i \quad h=h_1+h_2 \tag{3}$$

Из (3) следует, что постоянные $A_l^{(i)}$ не могут быть произвольными, а связаны соотношениями

$$A^{(2)}=P_q^{(21)}A^{(1)}+P_q^{(23)}A^{(3)};\ A^{(4)}=P_q^{(43)}A^{(4)}. \tag{4}$$

В выражениях (4) введены обозначения

$$P_q^{(43)}=-(2k\Omega_{p,q})\big/(2k^2-k_{s,q}^2);\ P_q^{(21)}=(2k\Omega_{p,q}\sin\theta_{p,q})\big/(2k^2-k_{s,q}^2)\sin\theta_{s,q};$$
$$P_q^{(23)}=(2k\Omega_p(\cos\theta_{p,q}-\cos\theta_{s,q})\big/(2k^2-k_{s,q}^2)\sin\theta_{s,q}\ ;$$
$$\theta_{p,q}=h_q\Omega_{p,q};\ \theta_{s,q}=h_q\Omega_{s,q}.$$

Использую соотношения (4) решения для w и σ_z можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}w(x,z)&=M_q^{11}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)A^{(1)}_{2(n-1)+q}+M_q^{12}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)A^{(3)}_{2(n-1)+q};\\ \sigma_z(x,z)&=M_q^{21}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)A^{(1)}_{2(n-1)+q}+M_q^{22}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)A^{(3)}_{2(n-1)+q},\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$M_q^{11}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)=-\Omega_{p,q}\sin(\Omega_{p,q}\bar{z}_q)+k\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_q);$$
$$M_q^{12}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)=\Omega_{p,q}\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_q)+kP^{23}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_q)+kP^{43}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_q);$$
$$M_q^{21}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)=\mu[(2k^2-k_s^2)\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_q)+2k\Omega_{s,q}P^{21}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_q)];$$
$$M_q^{11}(\Omega_{p,q},\Omega_{s,q},\bar{z}_q)=\mu[(2k^2-k_s^2)\cos(\Omega_{p,q}\bar{z}_q)+$$
$$2k\Omega_{s,q}(P^{23}\cos(\Omega_{s,q}\bar{z}_q)-P^{43}\sin(\Omega_{s,q}\bar{z}_q))].$$

Подстановка решений (5) в граничные условия (2) позволяет свести исходную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}M_1(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},h_1)\vec{A}_{2(n-1)+1}&=M_2(\Omega_{p,2},\Omega_{s,2},0)\vec{A}_{2n};\\ M_2(\Omega_{p,2},\Omega_{s,2},h_2)\vec{A}_{2n}&=M_1(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},0)\vec{A}_{2n+1}.\end{aligned} \tag{6}$$
$$n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

В системе (6) введены векторы-столбцы $\vec{A}_{2(n-1)+i}=colon(A^{(1)}_{2(n-1)+i},A^{(1)}_{2(n-1)+i})$ и матрицы

$$M_i(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i)=\begin{bmatrix} M_i^{11}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) & M_i^{12}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) \\ M_i^{21}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) & M_i^{22}(\Omega_{p,i},\Omega_{s,i},h_i) \end{bmatrix}.$$

Непосредственные вычисления позволяют показать, что детерминант передаточной матрицы порождающего пакета

$$Mp=M_2(\Omega_{p,2},\Omega_{s,2},h_2)M_2^{-1}(\Omega_{p,2},\Omega_{s,},0)M_1(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},h_1)M_1^{-1}(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},0)$$

равен единице и характеристическое уравнение является возвратным. Тогда дисперсионное соотношение для объёмных волн запишется в виде

$$b_Q=\cos(l\pi/m):l=0,1,\ldots,m-1:m=1,2,3,\ldots \tag{7}$$

Дисперсионные кривые следует характеризовать набором из трех индексов (s,l,m), где s порядковый номер зоны пропускания при возрастании частоты от нуля/. Типы колебаний (s,l,m) и (s,pl,pm) совпадают (p- целое число), а (s,l,m) и $(s,l,m-l)$ вырождены. Анализ выражений (7) возможен только численно. Как показали численные эксперименты, при четном значении m формы колебаний обладают симметрией, которая подчиняется правилу $w(\frac{h}{2}m-z)=-w(hm-z),\ 0\le z\le\frac{z}{2}mh$, а также правилу $w(sh)=0$, где $s=1,3,\ldots$.

.

1. Баас Ф.Г. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками / Ф.Г. Баас, А.А. Булгаков., А.П Тетервов. - М. Наука, 1989. – 288 с.
2. Борн М. Основы оптики / М. Борн , Э. Вольф – М.: Наука, 1970. – 886с.
3. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. / Н.А. Шульга К.: Наук думка, 1982.- 200 с.
4. Levchenko V.V. Propagation of magnetoelastic shear waves through a regularly laminated medium with metalized interfaces / V.V. Levchenko //Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, №1. – P.97-25.
5. Levchenko V.V. Mode shapes at the boundaries of the transmission zones for plane-polarized bulk waves in a regularly layered medium / V.V. Levchenko, A.N. Podlipenets and N.A. Shul`ga B.B. //Int. Appl. Mech. – 1985. – 21, №1 – P.13-16..

BODY WAVES IN A REGULARLY LAYERED MEDIUM WITH INTERFACE SLIPPING

The method to study body plane polarized elastic waves in a regularly layered medium with perfect interface slipping is developed. Dispersion relations are obtained. The results are presented in the form of dispersion relations for the body waves and graphical dependencies.