

УДК 677.055

ВИЗНАЧЕННЯ МАСА-ІНЕРЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ РУХОМИХ ЛАНОК МІНІ-ОСНОВОВ'ЯЗАЛЬНИХ МАШИН АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

І.П. Дорошенко, Б.В. Орловський, В.М. Дворжак

Київський національний університет технологій та дизайну

Розглянуто метод аналітичного визначення маса-інерційних параметрів рухомих ланок механізмів основов'язальних машин, які утворюють нижчі обертальні кінематичні пари, з урахуванням циліндричних отворів для змащування, що виконані в циліндричних головках рухомих ланок на їхній бічних поверхнях, із застосуванням програми, створеної в середовищі математичного процесора MathCAD.

Ключові слова: рухома ланка, обертальна кінематична пара, маса, момент інерції.

В основов'язальних машинах для передачі рухів робочим органам використовуються шарнірно-важільні механізми зазвичай з нижчими обертальними кінематичними парами. Характерною особливістю цих механізмів є високі швидкості роботи – до 3000 обертів за хвилину. Тому при конструюванні обертальних кінематичних пар таких механізмів передбачаються змащувальні отвори для подачі мастила до її елементів (Рис. 1.).

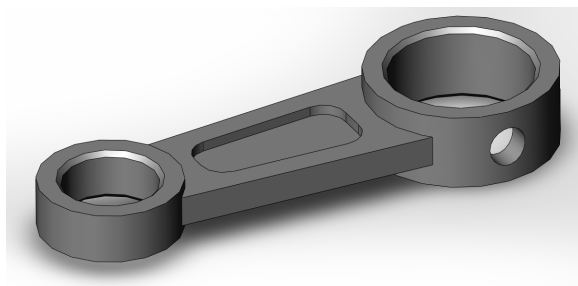


Рис. 1. Ескіз шатуна з бічним циліндричним отвором у його циліндричній головці для змащення елементів обертальної кінематичної пари

При розрахунку та конструюванні основов'язальних машин передбачається визначення маса-інерційних параметрів рухомих ланок їхніх механізмів. Відомі аналітичні методи визначення маса-інерційних параметрів ланок засновані на розчленуванні ланки на тіла простої геометричної форми (наприклад, циліндра, призми, сфери тощо), для яких можна аналітично визначити об'єм, масу, центр мас та осьовий момент інерції. Потім, використовуючи відомі аналітичні залежності, можна обчислити маса-інерційні параметри рухомої ланки в цілому.

Обертальна кінематична пара зазвичай утворюється елементами, які мають

форму прямих циліндрів – полого (що охоплює) та суцільного (що охоплюється), вставлених один в один по рухомій посадці з можливістю тільки взаємного повертання. Для постачання мастила до поверхонь тертя в полуму циліндрі може виконуватися бічний циліндричний отвір (або декілька таких отворів). Таким чином, при розчленуванні рухомої ланки на тіла простої геометричної форми отримується полий циліндр з бічним циліндричним отвором 1 (рис. 1, рис. 2).

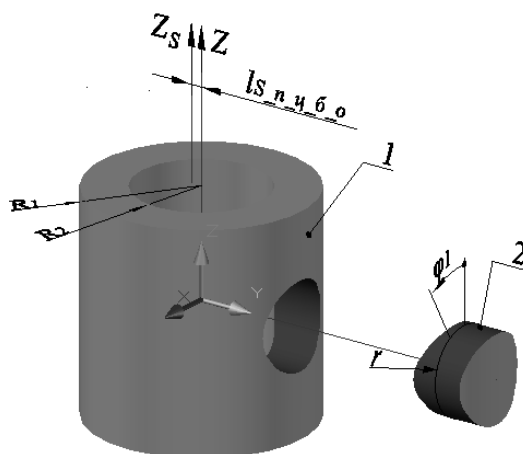


Рис. 2. Розрахункова схема циліндричного елемента обертальної кінематичної пари з бічним циліндричним отвором: 1 – полий циліндр з бічним циліндричним отвором; 2 – циліндричне тіло, отримане при перетині полого циліндра з бічним циліндром

Слід зазначити, що перетин таких циліндричних тіл є частинним випадком з'єднання пересічних оболонок.

Постановка завдання

При аналітичному дослідженні маса-інерційних параметрів рухомих ланок механізмів технологічних машин легкої промисловості потрібно створити уніфікований обчислювальний блок у MathCAD з метою автоматизації розрахунків. Цей обчислювальний блок при його застосуванні до обчислення маса-інерційних параметрів рухомих ланок при їхньому розчленуванні на прості тіла повинен забезпечувати визначення моменту інерції полого циліндра з бічним отвором відносно осі, яка проходить через його центр мас, масу самого полого циліндра з бічним отвором та відстань до його центра мас.

Об'єкт та методи дослідження

Об'єктом дослідження є маса-інерційні параметри рухомих ланок механізмів. Дослідження виконувалися з використанням теоретичних положень диференціального та інтегрального числення в програмі, створеної в середовищі математичного

процесора *MathCAD* [1].

Результати дослідження та їх обговорення

Для визначення маса-інерційних параметрів полого циліндра з бічним циліндричним отвором *l* (рис. 2) спочатку визначимо об'єм тіла 2, яке утворюється при перетині полого циліндра з бічним циліндром під прямим кутом. Приймемо, що вісь полого циліндра збігається з віссю абсцис правої декартової системи координат, вісь бічного циліндра збігається з віссю ординат. На перетині цих осей розміщується початок координат.

Запишемо рівняння ліній перетину (ребер) граней полого циліндра зовнішнього радіуса R_1 та внутрішнього радіуса R_2 з бічним циліндром радіуса r . Ці лінії обмежують тіло перетину вказаних циліндрів – полого та бічного. При відніманні цього тіла перетину від полого циліндра й утворюється полий циліндр з бічним циліндричним отвором, що досліджується. Рівняння ліній перетину запишемо в параметричній формі; в якості параметру приймемо кут φ_1 повороту радіуса r відносно центра кола – проекції бічного циліндра на площину ZX (рис. 2).

$$P_1(\varphi_1) := \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\varphi_1) \\ \sqrt{R_1^2 - r^2 \cdot (\sin(\varphi_1))^2} \\ r \cdot \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}; \quad P_2(\varphi_1) := \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\varphi_1) \\ \sqrt{R_2^2 - r^2 \cdot (\sin(\varphi_1))^2} \\ r \cdot \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

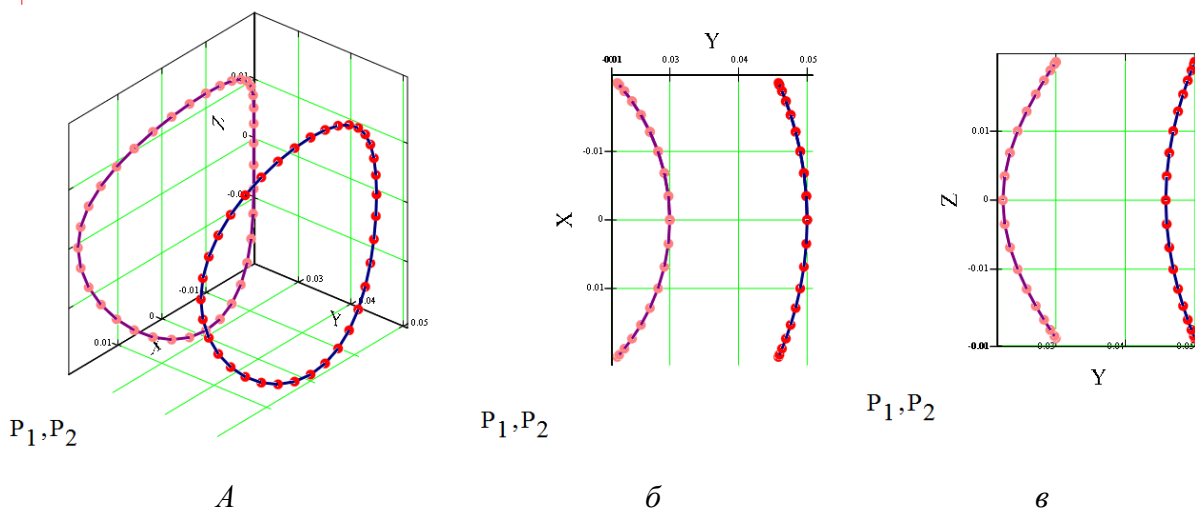


Рис. 3. Графіки ребер тіла перетину полого циліндра та бічного циліндра: *а* – 3D графіки ліній $P_1(\varphi_1)$ та $P_2(\varphi_1)$; *б* – проекція ліній $P_1(\varphi_1)$ та $P_2(\varphi_1)$ на площину XY ; *в* – проекція ліній $P_1(\varphi_1)$ та $P_2(\varphi_1)$ на площину YZ

Для визначення об'єму тіла перетину двох циліндрів скористаємося відомою формулою для його обчислення в декартових координатах [1]:

$$V = \iiint_U dx dy dz. \quad (2)$$

При цьому границі інтегрування по змінній x змінюються у проміжку $x = \pm\sqrt{r^2 - z^2}$, по змінній y – у проміжку $y = \sqrt{R_1^2 - x^2}$ та $y = \sqrt{R_2^2 - x^2}$, по змінній z – у проміжку $z = \pm r$.

Підставивши границі інтегрування до виразу (2), дістанемо:

$$V_{\delta_y} := \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_{\sqrt{R_1^2-x^2}}^{\sqrt{R_2^2-x^2}} dy dx dz. \quad (3)$$

Перейдемо до циліндричних координат, які змінюються у границях: $0 \leq P \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi$ та $\sqrt{R_2^2 - r^2 \cdot (\sin(\varphi_1))^2} \leq y \leq \sqrt{R_1^2 - r^2 \cdot (\sin(\varphi_1))^2}$. З урахуванням якобіана P та враховуючи вирази заміни координат:

$$x = r \cdot \sin(\theta), \quad y = y \quad \text{та} \quad z = r \cdot \cos(\theta),$$

дістанемо вираз (4) для визначення об'єму тіла, утвореного перетином полого циліндра та бічного циліндра під прямим кутом:

$$V_{\delta_y} := \int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^r \int_{\sqrt{R_2^2 - P^2 \cdot (\sin(\theta))^2}}^{\sqrt{R_1^2 - P^2 \cdot (\sin(\theta))^2}} P dy d\theta dP. \quad (4)$$

У процесі розрахунку виникає необхідність виразити в кінцевому вигляді через елементарні функції первісну, що виражена в загальному вигляді інтегралами:

$$\int \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2} \cdot (\sin(\varphi_1))^2} \quad \text{та} \quad \int \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \cdot (\sin(\varphi_1))^2} \quad \text{при} \quad r < R_1 \quad \text{і} \quad r < R_2.$$

Ці інтеграли є еліптичними інтегралами, які не можуть бути обчислені аналітично.

Тому для розрахунку об'єму за виразом (4) скористаємося програмою MathCAD, в якій алгоритм обчислення визначених кратних інтегралів можна виконувати із заданою точністю, наприклад $TOL = 0,001$ [1]. При цьому автоматично вибирається один із чисельних методів інтегрування: Romberg, Adaptive, Infinite Limit та Singular Endpoint [1] у залежності від виду підінтегральної функції.

При заданій густині матеріалу ρ (наприклад, для сталі $\rho := 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$) маса тіла бічного циліндра визначиться за відомою формулою:

$$m_{\delta_y} := \rho \cdot V_{\delta_y}. \quad (5)$$

Визначаємо масу полого циліндра:

$$m_{n_u} := \rho \cdot \pi \cdot (R_1^2 - R_2^2) \cdot h_{n_u}. \quad (6)$$

Визначаємо масу полого циліндра з бічним циліндричним отвором:

$$m_{n_u_o} := m_{n_u} - m_{o_u}. \quad (7)$$

Далі визначимо момент інерції тіла бічного циліндра відносно осі Z , скориставшись для цього формулою осьового моменту інерції [1]:

$$I_Z = \rho \cdot \iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz. \quad (8)$$

Переходячи до циліндричних координат та скориставшись границями інтегрування виразу (4) та відповідними замінами координат, вираз (8) можна переписати таким чином:

$$I_{Z_o_u} := \rho \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{R_2^2 - P^2 \cdot (\sin(\theta))^2}}^{\sqrt{R_1^2 - P^2 \cdot (\sin(\theta))^2}} (P^2 \cdot (\sin(\theta))^2 + y^2) \cdot P dy d\theta dP. \quad (9)$$

Вираз (9) так само як і усі попередні вирази обчислюється у програмі MathCAD.

Визначаємо відстань від осі Z до центра мас тіла бічного циліндра. Вказана відстань вимірюється уздовж осі Y :

$$Y_{S_o_u} := \frac{\int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{R_2^2 - P^2 \cdot (\sin(\theta))^2}}^{\sqrt{R_1^2 - P^2 \cdot (\sin(\theta))^2}} (P \cdot y) dy d\theta dP}{V_{o_u}}. \quad (10)$$

Визначаємо момент інерції полого циліндра відносно осі Z :

$$I_{Z_n_u} := \frac{1}{2} \cdot m_{n_u} \cdot (R_1^2 + R_2^2). \quad (11)$$

Таким чином, нам відомі моменти інерції відносно осі Z полого циліндра ($I_{Z_n_u}$) і тіла бічного циліндра ($I_{Z_o_u}$). Тому, застосувавши теорему Гюйгенса-Штейнера [2], можна визначити момент інерції відносно осі Z полого циліндра з бічним циліндричним отвором ($I_{Z_n_u_o}$) як різницю виразів (11) і (9), тобто:

$$I_{Z_n_u_o} := I_{Z_n_u} - I_{Z_o_u}. \quad (12)$$

Визначаємо координату по осі Y центра мас полого циліндра з бічним циліндричним отвором, виразивши її з виразу для обчислення координат загального центра мас системи тіл, а саме:

$$Y_{n_u} := \frac{Y_{n_u_o} \cdot m_{n_u_o} + Y_{S_o_u} \cdot m_{o_u}}{m_{n_u}}, \quad (13)$$

звідки

$$Y_{n_ц_б_о} := \frac{Y_{n_ц} \cdot m_{n_ц} - Y_{S_б_ц} \cdot m_{б_ц}}{m_{n_ц_б_о}}, \quad (14)$$

де $Y_{n_ц}$ – координата по осі Y центра мас полого циліндра; у прийнятій системі координат $Y_{n_ц} = 0$.

Модуль координати $Y_{n_ц_б_о}$ можна вважати відстанню від осі Z до осі, що проходить через центр мас полого циліндра з бічним циліндричним отвором ($l_{S_n_ц_б_о}$) паралельно до осі Z , тобто:

$$l_{S_n_ц_б_о} := |Y_{n_ц_б_о}|, \quad (15)$$

Запишемо вираз для визначення моменту інерції полого циліндра з бічним циліндричним отвором відносно осі Z_S (Рис. 2), яка проходить через його центр мас паралельно до осі Z :

$$I_{S_n_ц_б_о} := I_{Z_n_ц_б_о} - m_{n_ц_б_о} \cdot (l_{S_n_ц_б_о})^2. \quad (16)$$

Висновки

У результаті розрахунку залежності (4)...(7), (9)...(12) та (14)...(16) дозволяють створити обчислювальний блок для визначення маси, координат центра мас та осьового моменту інерції полого циліндра з бічним циліндричним отвором, що утворює обертальну кінематичну пару двох ланок, у прикладній комп'ютерній програмі, створеній у середовищі математичного процесора *MathCAD*. Результати розрахунку впроваджені в навчальну дисципліну «Основи розрахунку та конструювання типових машин» кафедри машин легкої промисловості Київського національного університету технологій та дизайну.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2.: [учеб. пособие для втузов] / Н.С. Пискунов – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 560 с.
2. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в MathCAD. Учебный курс. / Е.Г. Макаров – СПб. : Питер, 2005. – 448 с. – ISBN 5-94723-530-7.
3. Гернет М.М. Определение моментов инерции / М.М. Гернет, В.Ф. Ратобильский – М.: Машиностроение, 1969. – 248 с.

И.П. Дорошенко, Б.В. Орловский, В.Н. Дворжак

Определение масса-инерционных параметров подвижных звеньев мини-основязальных машин аналитическим методом

В статье рассматривается метод аналитического определения масса-инерционных параметров подвижных звеньев механизмов основязальных машин, образующих низшие вращательные кинематические пары, с учётом цилиндрических отверстий для смазки, выполненных в цилиндрических головках подвижных звеньев на их боковых поверхностях, с использованием программы MathCAD.

Ключевые слова: подвижное звено, вращательная кинематическая пара, масса, момент инерции.

I.P. Doroshenko, B.V. Orlovsky, V.M. Dvorzhak

Determination of mass-inertia parameters of mobile links of mini Warp Knitting Machines an analytical method

In the article is examine the method of analytical determination of mass-inertia parameters of mobile links of mechanisms of Warp Knitting Machines, formative lower rotatory kinematics pair, taking into account the cylindrical openings for greasing, mobile links executed in cylindrical heads on their sides, with the use of the MATHCAD.

Keywords: mobile link thread, rotatory kinematics pair, mass, moment of inertia.