УДК 378.5

ВИТОКИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Попова Л. С., Харитонова М. О.

Київський національний університет технологій та дизайну

У статті розглядається розвиток математичної думки, в ході якого було закладено підґрунтя для створення класичного інтегрального числення – важливого розділу курсу вищої математики. Акцент зроблено на аналіз методів обчислення площ геометричних фігур.

Ключові слова: *освіта, методика, геометрична фігура, площа, сума*

Однією з суттєвих особливостей реформи вищої школи є посилення гуманітарної складової освітнього процесу. Якщо гуманітарна спрямованість суспільно-гуманітарних дисциплін має на меті формування суспільного самоусвідомлення студента, то для природничих наук, до яких належить і вища математика, гуманітаризація означає, в першу чергу, розвиток його (студента) інтелектуальних здібностей. Розвиваючи математичну думку, студент опановує вміння мислити від конкретного до абстрактного і знову, уже на вищому рівні, повертатись до розв'язування практичних задач.

Відзначимо, крім того, тенденцію до перерозподілу навчальних годин в бік різкого збільшення тієї їх частини, яка виділяється на самостійну роботу студента. Підлягають значному скороченню як кількість лекційних годин, так і годин, які відводяться на проведення практичних занять.

На наш погляд, націлюючи студентів на більш самостійне вивчення розділів вищої математики, викладач повинен орієнтувати їх на збереження певної послідовності у засвоєнні матеріалу, що дозволить студентам зрозуміти внутрішню логіку кожного з розділів, їх взаємопроникнення і взаємозв'язок, а головне – сформує відчуття цілісності всього курсу і дасть можливість у подальшому успішно застосувати набуті знання. Тому ми вважаємо, що в процесі вивчення розділів математики необхідно знайомити студентів з історичними аспектами їх виникнення та розвитку.

Звернення до минулого дозволяє оцінити міру просування вперед [1].

Постановка завдання

Проаналізувати цілісну картину становлення інтегрального числення на прикладі дослідження історії розвитку розв'язування задачі про знаходження площі геометричної фігури.

Об'єкти та методи дослідження

Не зважаючи на те, що виникнення математики було обумовлено потребою розв'язування практичних задач, математика в процесі свого історичного розвитку сформувалась у цілком самостійну область знань з власною внутрішньою логікою. При цьому вона зберегла свою роль незамінного інструменту дослідження і розв'язування задач, які виникають у різних сферах наукової та практичної діяльності людини.

Об'єктом досліджень є історичний аспект становлення інтегрального числення від його зародження до періоду обґрунтування основ математичного аналізу. Здавен перед математиками постала задача про розробку загальних аналітичних методів обчислення площ геометричних фігур, які мають криволінійний контур. Такі методи розв'язування вказаних задач розглядаються у розділі «Інтегральне числення». Величина площі лекал або деталей взуття являється нормативним показником, тому задача про обчислення площ фігур займає особливе місце у математичній підготовці технологів. Обчислення площі фігур є одною з задач, які ілюструють практичне застосування інтегрального числення.

В основу статті покладено дослідження історичного процесу становлення інтегрального числення, в тому числі, появи як базових понять, так і розвитку основної ідеї аналітичних методів, з якими студенту доцільно ознайомитись.

Використовуються методи аналізу, синтезу та логічного узагальнення.

Результати досліджень та їх обговорення

Виникнення геометрії

На початковому етапі розвитку математики відбулось формування її первинних понять: *геометрична фігура* і *число*. Ці поняття спонукали появі *рахунку* і *виміру*, а також введенню дій над числами.

Зародження геометрії сягає у глибину тисячоліть. Вона виникла для задоволення потреб, які були обумовлені практичною діяльністю людей і пов'язані із спостереженнями за оточуючим середовищем та розвитком ремесел, культури, мистецтва. Про це говорять назви геометричних фігур у давніх греків: «ромбос» –

Рис. 1. **Муза геометрії**

дзиґа; «трапеція» – «трапедсіон» – столик; «конус» – «конос» – соснова шишка; «лінія» – «лінум» – льняна нитка; «сфера» – м'яч.

Задача про обчислення площ геометричних фігур є однією з найдавніших задач, яку почали розв'язувати люди. Єгипетські фараони ділили землю і роздавали її кожному єгиптянину за жеребом. З кожної ділянки вони збирали відповідний податок. Траплялось, що Нил заливав ту чи іншу ділянку. Тоді потерпілий звертався до царя, а той посилав землемірів, які встановлювали на скільки зменшувалася ділянка і, відповідним чином, зменшували податок. Так виникли геометрія та вимір площ у Давньому Єгипті.

Подальший розвиток математики пов'язаний з введенням арифметичних дій над числами. На цьому етапі розвитку суспільства математичні знання про властивості арифметичних дій та способи виміру площ простих геометричних фігур і об'ємів тіл набувались емпіричним шляхом (методом спроб та помилок). У цьому напрямі далеко просунулись шумеро – вавилонські, китайські та індійські стародавні математики.

Стародавні греки перейняли у єгиптян ремесло землевиміру та виміру об'ємів тіл. При цьому, античні геометри *перейшли від набору рецептів* до *встановлення загальних закономірностей*, склали перші систематизовані та обґрунтовані наукові праці з геометрії. Перші доведення геометричних тверджень з'явилися у працях філософа і математика з Мілета Фалеса (640/624–548/545 до н.е.). При доведенні рівності фігур він використовував *спосіб накладання та перегину*. Фігури, рівність яких потрібно було довести, накладали одну на одну. Вважають, що саме Фалес перейняв знання з геометрії у Єгипті і ознайомив з ними греків. Давньогрецькі математики (зокрема Анаксагор з Клазомен (500–428 до н.е.)) підводили філософську основу для опису первинних геометричних понять: точка, лінія, поверхня. Для цього вони ввели поняття нескінченно малого та нескінченно великого, досліджували проблему квадратури круга (побудову квадрата рівного за площею до площі заданого круга).

Принципово важливим внеском у розвиток геометрії стали «Начала» Евкліда. Евклід (біля 325–265 до н.е.) систематизував відомі на той час знання з геометрії. В його геометрії описуються властивості найпростіших фігур на площині та тіл у просторі, а також визначаються їх площі та об'єми. В основу розв'язання вказаних задач покладені геометричні міркування (постулати). «Начала» Евкліда протягом двох тисячоліть являли собою стандарт математичної строгості доведення нових математичних істин шляхом їх виведення з вже відомих істин та подальшого логічного обґрунтування. При цьому *логіка доведення гарантувала їх істинність*.

У працях давньогрецького математика Аполлонія Пергського (262–190 до н.е.) з'являється ідея складання рівнянь кривих. У монографії «Конічні перетини» Аполлоній навів рівняння еліпса, параболи та гіперболи, використовуючи «координати» точок на кривій. При дослідженні кривих другого порядку і складанні їх рівнянь Аполлоній використовував метод, який полягав у співставленні відстаней від точок кривої до деякого її діаметру і спряжених до нього хорд, що можна вважати прообразом системи координат. Оскільки алгебра на той час знаходилась у початковому стані, то співвідношення між «координатами» Аполлоній встановлював, виходячи з геометричних міркувань про рівновеликі частини. Аполлоній вперше виконав класифікацію кривих другого порядку, виходячи з алгебраїчних (за видом рівнянь), а не з геометричних міркувань. Він запропонував назву для цих кривих.

Збільшення обсягу знання, їх систематизація та узагальнення сприяли розробці різних методів знаходження площі фігур.

1. *Метод заповнення площі фігури «одиничними квадратиками»*

На початковому етапі розвитку геометрії при обчисленні площі геометричних фігур *базовою задачею була задача знаходження площі прямокутника*. На той час, коли всі геометричні побудови виконувались за допомогою лінійки та циркуля, відношення довжини до ширини прямокутника вважалось *числом раціональним*. Якщо довжину прямокутника вибрати за одиницю виміру, то його ширину можна виразити у вигляді дробу ***m n***, де ***m*** та ***n*** є *натуральними числами*.

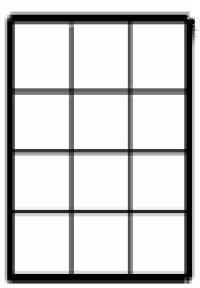

Рис. 2. **Заповнення «одиничними квадратиками»**

Для визначення величини площі прямокутника і вираження її у квадратних одиницях необхідно, по-перше, знайти розмір «одиничних квадратиків», з якими можна було співміряти площу прямокутника, а по-друге, встановити їх кількість при заповненні без накладання (спільними у квадратиків є тільки їх межові точки) (рис. 2).

Довжину сторін «одиничних квадратів», які покриють площу прямокутника, можна визначити як найменший спільний дільник величин сторін прямокутника, d = НСД(m,n).

Наприклад, для прямокутника розміром 9×12 (рис.2) довжина сторони «одиничного квадратика» d=НСД(9;12)=3 од. Таким чином, «одиничний квадратик» розміром 3 од.×3 од. можна розмістити вздовж ширини прямокутника 3 рази, а вздовж довжини 4 рази. Всього потрібно взяти 12 таких «одиничних квадратиків». Оскільки площа «одиничного квадратика» вважається рівною квадрату його сторони d^2 кв. од, то одержуємо величину площі прямокутника $S = 12 \times 3^2 = 12 \times 9 = 108$ (кв. од.).

Давні математики, узагальнюючи здобуті емпіричним шляхом результати, одержали формулу для обчислення площі прямокутника. $S = ab$.

Крім розглянутої формули, були знайдені формули для обчислення площі *прямокутного трикутника, трапеції, паралелограма*. Площа довільного многокутника обчислювалась як сума площ трикутників, на які можна розбити многокутник.

2. *Метод «вписування многокутників»*

Використовуючи метод покриття фігури «одиничними квадратиками», не можна обчислити площу круга, оскільки за допомогою циркуля і лінійки не вдається побудувати відрізок довжини πr, оскільки число $\boldsymbol{\pi}$ є нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Цей метод не дозволяє розв'язати задачу про квадратуру круга.

За часів Евкліда не було відомо поняття границі змінної величини, але у його «Началах» сформульована *лема,* яка фактично лежить в основі класичної теорії границь: *для двох заданих нерівних величин, якщо від більшої відняти більше її половини і від залишку відняти більше його половини, і це виконувати багато разів, то величина одержаного внаслідок цих дій залишку буде меншою за меншу з розглянутих величин.*

Давні греки для обчислення площі S круга використовували метод «*вписування многокутників*» у круг. Послідовно вписуючи многокутники і збільшуючи кількість їх сторін (рис.3), вони бачили, що площі многокутників збільшуються і наближаються до площі круга, $S_1 < S_2 < \ldots < S$. При цьому, довжини сторін многокутників та різниця між площами многокутників зменшуються і стають меншими за будь-яке наперед задане мале число.

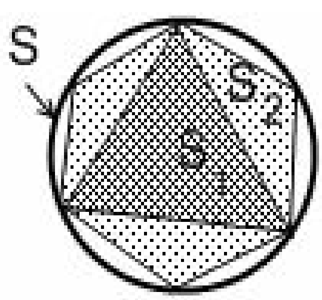

Рис. 3. **Вписування многокутників**

Площа круга дорівнює числу S, до якого наближається монотонно зростаюча послідовність площ вписаних многокутників.

3. *Метод «вичерпувань»*

Задача обчислення площі прямокутника значно ускладнюється, якщо відношення його сторін є числом ірраціональним (нескінченним неперіодичним дробом). У цьому випадку не вдається побудувати «одиничний квадратик», оскільки для ірраціональних чисел не існує найменшого спільного дільника (НСД). Тому при покритті прямокутника будь-якими «одиничними квадратиками» вздовж його сторін завжди залишаються незаповнені смуги.

Давньогрецький математик, фізик та інженер Архімед (287–212 до н.е.) у творі «Про вимір довжини кола» розглянув задачу про знаходження довжини кола та площі круга., в яких він удосконалив і віртуозно застосував метод «вичерпувань», в основу якого покладено геометричні міркування. У античних греків цей метод не мав назви. Назву «метод вичерпувань» запропонував бельгійський математик Григорій із Сен-Вінцента (1584–1667).

Метод «вичерпувань» відрізняється від методу «вписування многокутників» тим, що вписавши початковий трикутник, Архімед на кожному наступному кроці вписує у вільні сегменти параболи нові трикутники. Таким чином, він «вичерпує» (заповнює) фігуру множиною трикутників (рис.4), площу яких легко обчислити.

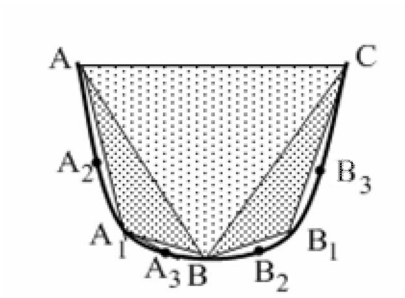

Рис. 4. **Вичерпування площі**

Архімед складає ряд, який є нескінченно спадною геометричною прогресією, і обчислює його суму:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=1+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...=\frac{4}{3}$$

Кожний доданок ряду – це сума площ трикутників, вписаних у вільні сегменти, які залишилися після виконання попереднього заповнення трикутниками.

Використовуючи метод «вичерпувань», Архімед строго доводив результати, які він інтуїтивно передбачав. Так, він обчислював площі криволінійних фігур, об'єми циліндрів і куль, знаходив центри ваги, точки дотику прямих і кривих тощо.

При знаходженні площі фігури за допомогою методу «вичерпувань» потрібно було виконати певні кроки, а саме:

– у задану фігуру вписати монотонну послідовність простих фігур, площі яких легко обчислюються;

– довести, що монотонно зростаюча послідовність сумарних площ всіх вписаних фігур наближається до площі розглянутої фігури; тобто, одержуючи все більш «тісні» нерівності, досягти як завгодно близького їх наближення до рівності;

– висунути гіпотезу, що послідовність сумарних площ наближається до одного певного числа *A*, яке і визначає площу фігури;

– довести, що супротивне припущення приводить до протиріччя.

Оскільки загальна теорія границь на той час не була розроблена (греки уникали поняття нескінченності), усі кроки методу «вичерпувань», включаючи обґрунтування єдиності границі, щоразу повторювались при розв'язанні кожної конкретної задачі.

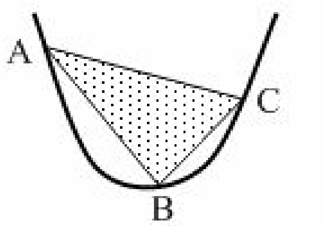

Рис. 5. **Співмірні фігури**

У творі «Квадратура параболи» Архімед, використовуючи метод «вичерпувань», довів, що площа сегменту параболи *ABC*, який відтинається від неї прямою *AC*, складає 4/3 від площі вписаного в цей сегмент трикутника ΔABC, тобто ці фігури є співмірні (рис. 5). Для доведення він використав геометричні міркування .

Відзначимо, що метод «вичерпувань» мав ряд недоліків:

– був досить громіздким;

– не було вироблено загального підходу для визначення числа *A*, яке часто просто вгадувалось або для його знаходження використовували штучні методи.

Низький рівень алгебри того часу не дозволяв подолати вказані недоліки.

4. *Метод «неподільних»*

Для дослідження просторового тіла і обчислення його об'єму Архімед перетинає його паралельними площинами і складає «альбом перерізів» (інфінітезімальне розкладання, тобто розкладання на *нескінченно малі елементи* – «неподільні»). Використання такого способу дослідження виникло можливо під впливом теорій давньогрецької філософії атомістів з їх «неподільними». При обчисленні площ та об'ємів методом «неподільних» Архімед вважав за обов'язкове передоведення одержаних результатів, за допомогою більш строгого, на його погляд, методу «вичерпувань».

Довгий час математики задовольнялись результатами, одержаними греками, не додаючи до них нічого нового. Це пояснювалось тим, що тільки методи греків вважалися достатньо строгими.

Геометрія греків, яку називають евклідовою геометрією, в наш час вивчається у середній школі. Вона є базою математичних знань студентів-першокурсників.

Стрімкий розвиток математичної думки в Європі.

У XVI – XVII ст. в Європі поновився інтерес до задач про обчислення площ фігур та об'ємів тіл. Спочатку математики почали широко використовувати метод «неподільних». Італійський математик Бонавентура Кавальєрі (1598–1647) подав найбільш повне обґрунтування методу «неподільних». Ідея методу полягає в тому, що кожну фігуру можна представити як сукупність паралельних відрізків з нульовою шириною (неподільних), проведених паралельно до деякої прямої (*регуле*). Одержану сукупність паралельних відрізків без зміни їх довжини потім об'єднували і утворювали іншу фігуру, спосіб обчислення площі якої був відомий.

Блез Паскаль (1623–1662) у розвитку методу «неподільних» пішов значно далі. Він глибше тлумачив рівність фігур, *вважаючи рівними дві фігури, якщо різниця між ними менша за будь-яку величину*, тобто підійшов до поняття границі.

Не дивлячись на те, що математики XVII ст. вже почали розробляти теорію нескінченно малих та теорію границь, способи розв'язання кожної конкретної задачі про обчислення площі фігури описувались словесно. Не було розроблено загальний метод розв'язування таких задач. Назріла потреба у створенні спеціальної символіки, яка дозволила б перейти до узагальнення всіх отриманих результатів [2].

5. *Метод координат і його вплив на взаємне проникнення геометрії і алгебри*

Французький математик «батько алгебри» Франсуа.Вієт (1540–1603) ввів у математику символьну мову, яку почали використовувати для запису рівнянь. Це поклало початок розвитку алгебри як самостійного розділу математики. З розвитком алгебри з'явилась можливість проведення глибоких загальних аналітичних досліджень, які не спирались на геометричні міркування.

Суттєвий крок вперед на шляху, який вказав Вієт, зробили французькі математики П'єр Ферма (1601–1665) та Рене Декарт (1596–1650). На відміну від Вієта, у Декарта в його теорії завжди присутній один основний елемент – лінійний відрізок. Виконання операцій над відрізками приводять знову до деякого нового відрізку.

Відрізки він зіставляє дійсним числам. Таким чином, дійсне число у Декарта розглядається як *відношення довжини заданого відрізка до одиничного*. Це є геометричним тлумаченням числа. Рене Декарт виправляє стратегічну помилку античних математиків і одночасно з геометричним тлумачення відновлює алгебраїчне розуміння числа. На такому шляху йому вдалося встановити зв'язок між числом і положенням точки на площині і поєднати алгебру з теорією кривих ліній. Використання методу координат дозволило Декарту ставити у відповідність кожному геометричному співвідношенню між координатами рухомої точки деяке рівняння.

У своєму творі «Геометрія» Декарт вперше ввів поняття *змінної величини і функції*. Змінна величина у нього виступає, з одного боку, як відрізок змінної довжини і постійного напряму – поточна координата точки, що своїм рухом описує криву (геометричне міркування), а з іншого, як неперервна чисельна змінна (алгебраїчне міркування), що пробігає сукупність чисел, які відповідають координатному відрізку. Такий погляд на змінну сприяв більш глибокому взаємному проникненню геометрії і алгебри. Декарт запропонував сучасний варіант символіки, ввів позначення змінних і шуканих величин ($x, y, z, \dots$), а також позначення для коефіцієнтів у рівняннях ($a, b, c, \dots$). Запис формул у Декарта мало відрізняється від сучасного.

Використання декартової системи координат дало можливість математикам аналітично описувати контури геометричних фігур, криві та поверхні, представляти функціональні залежності між змінними величинами. У своїй «Геометрії» Декарт наводить багато прикладів, на яких ілюструє велику силу нового методу – методу координат і одержує багато результатів невідомих раніше.

6. *Метод квадратури*

Метод координат дозволив позбутись необхідності подвійного доведення від супротивного посилання, що *площа заданої фігури практично дорівнює площі фігури, яка її наближає*. Обґрунтування методу квадратури не спирається на поняття нескінченно малих, але неявно *включає поняття границі*.

Так у своєму «Геометричному творі» (1647) Григорій описує спосіб обчислення площ криволінійних фігур (та об'ємів тіл) шляхом заповнення їх паралелограмами (або паралелепіпедами) аналогічно, до того, як це робили давньогрецькі вчені. У той час, коли давні греки наближали криволінійні фігури довільними многокутниками, багато геометрів XVII ст. почали надавати перевагу заповненню фігури *прямокутниками*.

Використання методу квадратури французьким математиком Ферма

Ферма, розв'язуючи задачу про площу фігури, яка знаходиться між дугою параболи і віссю абсцис (рис. 6), будує параболу $y = x^2$ у прямокутній системі координат і обчислює площу, яка відповідає точкам на осі *OX* від початку координат (точка O) до довільної точки ***x*** на осі абсцис [3].

Площу під графіком Ферма наближає сумою площ прямокутників: $S = S_1 + S_2 + \ldots$. Ординати точок, які лежать на параболі, він знаходить, виходячи з геометричних властивостей параболи. Для визначення абсцис проміжних точок на відрізку $[0, x]$ Ферма вводить довільне число $b < 1$. Площу кожного з прямокутників S_i (рис. 6) він обчислює як різницю площ двох відповідних прямокутників: $S_1 = S_{OxA_1x^2} - S_{ObxA_2x^2}$

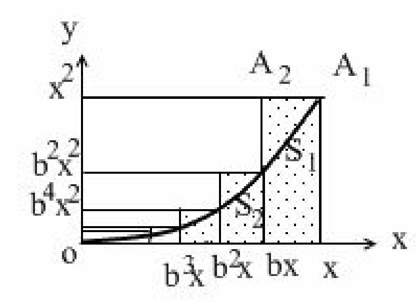

Рис. 6. **Спосіб Ферма**

$$S_1 = x \cdot x^2 - (b \cdot x) \cdot x^2 = (1-b) \cdot x^3; \qquad S_2 = (b \cdot x) \cdot (b \cdot x)^2 - \left(b^2 \cdot x\right)^2 \cdot (b \cdot x)^2 = (1-b)(b \cdot x)^3$$

і т.д. Обчисливши суму площ всіх прямокутників $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$, Ферма одержав геометричну прогресію із знаменником $b^3 < 1$. Сума цієї прогресії:

$$S = (1-b) \cdot x^3 + (1-b) \cdot b^3 \cdot x^3 + (1-b) \cdot b^6 \cdot x^3 + \ldots = (1-b) \cdot x^3 (1 + b^3 + b^6 + \ldots),$$

$$S = \frac{(1-b) \cdot x^3}{(1-b^3)} = \frac{x^3}{1 + b^3 + b^6}.$$

При збільшенні кількості побудованих прямокутників їх площі S_n зменшуються і стають нескінченно малими. Ферма покладає $b = 1$ і одержує результат $S = \frac{x^3}{3}$, що відповідає величині інтеграла $\int_0^x x^2 dx$.

Використання методу квадратури французьким математиком Паскалем.

Паскаль, удосконалюючи метод квадратури, недооцінив появу нових аналітичних методів. Розв'язуючи задачі, він спирався на геометричні традиції своїх попередників, але на відміну від них використовував арифметичні властивості прогресій. Знаходячи квадратуру підпараболи, Паскаль будував прямокутники, визначивши координати проміжних точок на відрізку $[0,x]$ відповідно до членів арифметичної прогресії з різницею d (рис.7).

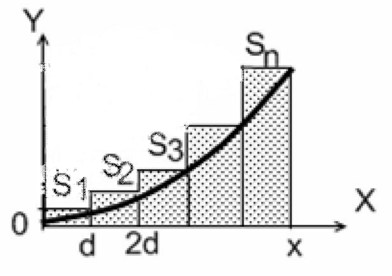

Рис. 7. **Спосіб Паскаля**

Площі прямокутників обчислювались ним за формулою $S_n = d \cdot (n \cdot d)^2$, число n відповідає номеру прямокутника. Сума площ таких прямокутників дорівнює: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$, отже

$$S = d \cdot d^2 + d \cdot (2d)^2 + d \cdot (3d)^2 + \ldots + d \cdot (nd)^2,$$

$$S = d^3(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = d^3(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}).$$

Вважаючи, що при достатньо великій кількості n прямокутників можна знехтувати доданками $\frac{n^2}{2}$ і $\frac{n}{6}$, вчений одержав формулу, яка співпадає з формулою Ферма, $S = \frac{x^3}{3}$, де $x = n \cdot d$.

Паскаль при обчисленні площ криволінійних фігур удосконалив метод квадратури, ввівши в нього той необхідний елемент, який використовується при визначенні визначеного інтеграла, а саме, границю послідовності сум, записаних у алгебраїчній формі. Таким чином, він підійшов до поняття визначеного інтеграла ближче усіх своїх сучасників.

Висновки

1. Аналіз розвитку математичної думки від періоду її зародження до кінця XVII ст. показує, що всі базові ідеї інтегрального числення вже розглядались, але не вистачало системного їх використання, чіткого поняття функції та загального обчислювального алгоритму, який відтіснив би на задній план зайву роботу думки, необхідну для розв'язання окремих задач. Узагальнення і систематизацію ідей виконали двоє великих вчених XVIII ст. Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц. Остаточне оформлення знань у класичну теорію інтегрального числення виконав у XIX ст. Огюстену Коші.

2. Дана стаття допоможе студентам систематизувати знання набуті у школі і створить логічний місток, що полегшить засвоєння нових підходів до розв'язання більш складних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Стройк Д. Я. – М.: Издательство «Наука»,1990. – 253 с.
2. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Вилейтнер Г. – М.: Издательство «Наука»,1966. – 508 с.
3. Даан-Дальмедико А. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.– М.: Издательство «Мир»,1986. – 431 с.

Попова Л. С., Харитонова М. А.
Истоки интегрального исчисления

В статье рассматривается развитие математической мысли, в ходе которого были заложены основы для создания классического интегрального исчисления – важного раздела курса высшей математики. Акцент сделан на анализ развития методов вычисления площадей геометрических фигур.

Ключевые слова: *образование, методика, геометрическая фигура, площадь, сумма*

Popova L. S., Kharytonova M. O.
The origin of integral calculation

The article examines the development of mathematical knowledge which provided fundamental principles for integral calculation's creation. Main methods of obtaining squares of geometrical figures are analyzed.

Key words: *education, methodology, geometrical figure, square, sum*