УДК.531.18

К. В. Авдонін, А.М. Шут
Київський національний університет технологій та дизайну

ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА У СПЕЦІАЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

У даній роботі розглядається рівномірне обертання твердого тіла навколо нерухомої осі з точки зору спеціальної теорії відносності. Знайдені співвідношення, які пов'язують координати точок тіла, відносно нерухомої системи відліку, з координатами точок тіла, відносно власної системи відліку – системи відліку пов'язаної з тілом. Запропонований шлях знаходження релятивістської енергії обертального руху тіла.

Вступ

Розвиток сучасної науки, особливо фундаментальної і галузі космічної техніки, потребує поглибленого вивчення теми «Спеціальна теорія відносності» та включення нового матеріалу в підручники з фізики та посібники для спецкурсів фізико-математичного напряму. Більшість сучасних підручників з фізики, наприклад роботи [1], [2] та інші, містить розгляд тільки поступального руху тіла у спеціальній теорії відносності. Тому, використання результатів даної роботи дозволить підвищити повноту викладання матеріалу з теми «Спеціальна теорія відносності» та якість учбового процесу.

Постановка задачі

Позначимо через ω - кутову швидкість обертання тіла, через K - нерухому систему відліку, координати і радіус-вектор точки твердого тіла відносно неї через (x, y, z, t) та $\vec{r}$. Через K' позначимо власну систему відліку твердого тіла, координати і радіус-вектор точки твердого тіла відносно неї через (x', y', z', t') та $\vec{r}'$. У початковий момент часу відповідні вісі координат систем K і K' співпадають а годинники показують однаковий час.

Метою роботи є знаходження: правил перетворень координатами точок тіла, залежності швидкості руху точки тіла від відстані до осі обертання та релятивістської енергії обертального руху твердого тіла.

Перетворення координат та відносна швидкість руху

Розглянемо довільну точку B координатної осі Y' з координатами, відносно K', рівними: $(0, y'_B, 0, t')$, модуль радіус-вектора точки B буде дорівнювати: $r'_B = |y'_B|$. Позначимо миттєву швидкість руху точки B, відносно системи K, через $\vec{\upsilon}_B$. Вектор миттєвої швидкості $\vec{\upsilon}_B$ завжди перпендикулярний до вектора $\vec{r}'_B$, звідси випливає, що модуль радіус-вектора точки B відносно систем K і K' буде однаковим:

$$r'_B = r_B \quad , \tag{1}$$

оскільки зміна довжини відбувається тільки у напрямку руху системи відліку.

Протягом нескінченно малого відрізку часу після початку руху система відліку K' буде миттєвою інерціальної системою відліку, що рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}_B$ вздовж осі X нерухомої системи K.

У довільний наступний момент часу систему K' теж можна вважати миттєвою інерціальної системою відліку, що починає рух вздовж осі X'' системи K'', нерухомої відносно системи K (див. рис. 1).

Тоді, згідно перетворенням Лоренца, час t'_B, який покаже годинник в точці B відносно власної системи відліку K', та час t_B, який показує годинник у нерухомій системі, пов'язані співвідношенням:

$$t'_B = t_B \sqrt{1 - \frac{\upsilon_B^2}{c^2}} \quad . \tag{2}$$

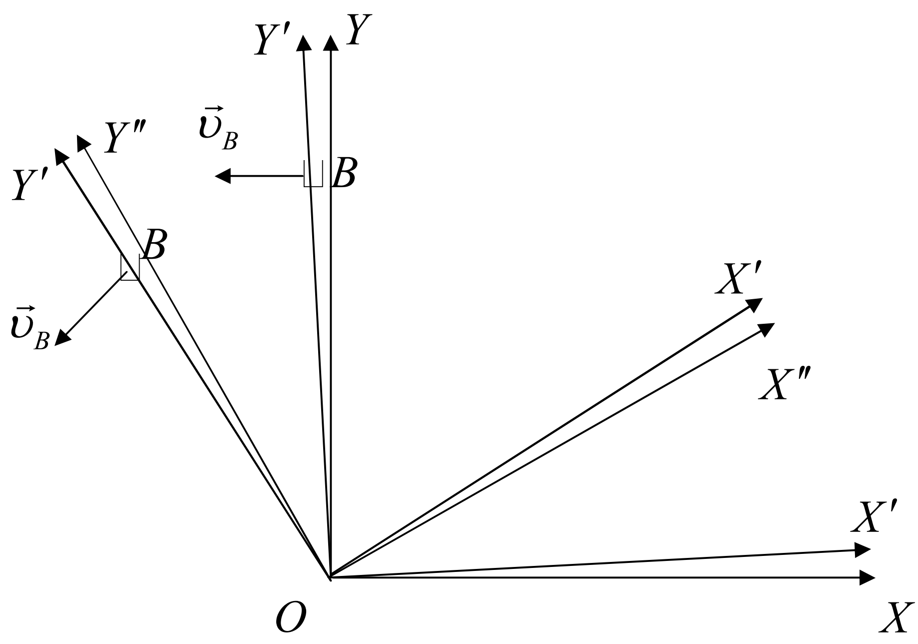

Рис. 1.

Напрям координатних осей системи K вибирається довільно. Тому, співвідношення (1) та (2) для точки B можна узагальнити для будь якої точки, нерухомої відносно системи відліку K'.

Таким чином, ми одержали, що модуль радіус-вектора довільної точки твердого тіла, відносно власної системи K', дорівнює модулю її радіус-вектора відносно системи K і, окрім цього, відносно системи K у кожній точці тіла буде свій плин часу, який залежить від відстані до осі обертання. Звідси випливає, що система відліку K', відносно системи K, стає криволінійною, оскільки кут повороту точки тіла відносно осі обертання буде зменшуватись із збільшенням відстані точки до осі обертання (див. рис. 2).

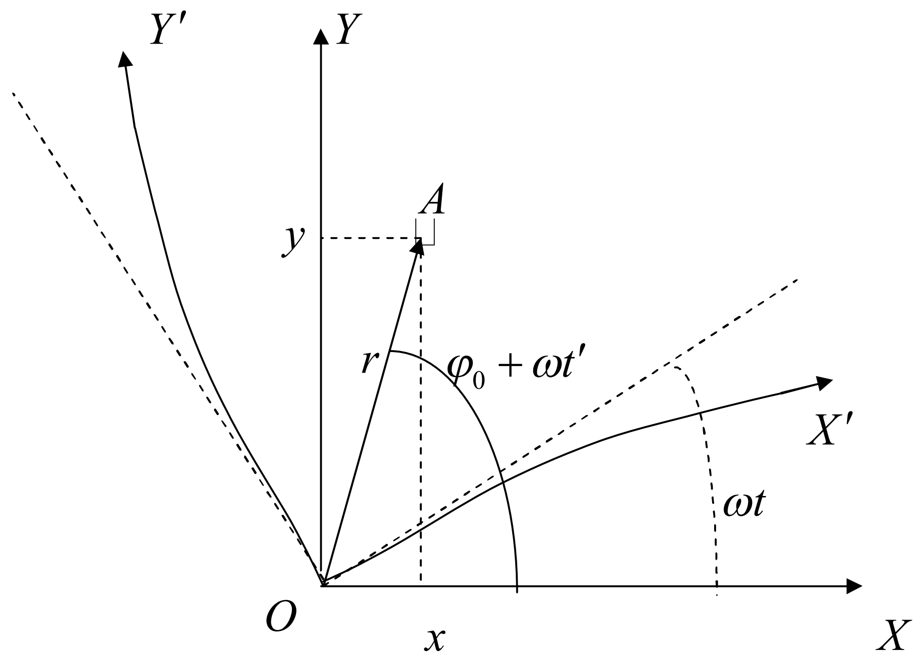

Рис. 2.

Позначимо через φ_0 - кут, який утворює радіус-вектор довільної точки A, нерухомої відносно системи K', з віссю X у початковий момент часу. Тоді, координати точки A у системі K' будуть такими:

$$\begin{cases} x' = r\cos\varphi_0 \\ y' = r\sin\varphi_0 \\ z' = z \\ t' = t\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}} \end{cases} . \qquad (3)$$

З рисунку 2 видно, що координати A, відносно нерухомої системи K, дорівнюють:

$$\begin{cases} x = r\cos\left(\varphi_0 + \omega t'\right) \\ y = r\sin\left(\varphi_0 + \omega t'\right) \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{cases}. \qquad (4)$$

Перетворимо тригонометричні функції у перших двох виразах системи (4) наступним чином:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi_0 \cos\omega t' - r\sin\varphi_0 \sin\omega t' \\ y = r\cos\varphi_0 \sin\omega t' + r\sin\varphi_0 \cos\omega t' \end{cases}. \qquad (5)$$

Використовуючи рівності (3) надамо виразам (5) такого вигляду:

$$\begin{cases} x = x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t' \\ y = x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{cases}. \qquad (6)$$

Система (6) визначають перетворення координат точки A при переході від системи K' до системи K. З системи (6) знаходимо зворотні перетворення для координат x' та y':

$$\begin{cases} x' = x\cos\omega t\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}} + y\sin\omega t\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}} \\ y' = -x\sin\omega t\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}} + y\cos\omega t\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}} \end{cases}. \qquad (7)$$

Підставимо у перетворення (6) рівності (2) і знайдемо першу похідну по часу від обох частин рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x'\omega\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\cos\omega t\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}} - y'\omega\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\sin\omega t\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}} \\ \dfrac{dy}{dt} = x'\omega\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\sin\omega t\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}} + y'\omega\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}\cos\omega t\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}} \end{cases} . \quad (8)$$

Підведемо обидві частини рівнянь системи (8) до квадрату і складемо їх, тоді, враховуючи рівності: $\upsilon^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$; $r^2 = (x')^2 + (y')^2$ маємо:

$$\upsilon^2 = r^2\omega^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) . \quad (9)$$

Із виразу (9) можна знайти залежність модуля миттєвої швидкості руху точки A відносно системи K:

$$\upsilon = \frac{\omega r}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}} . \quad (10)$$

Якщо модуль радіус-вектора до безмежності, то швидкість руху точки A буде прямувати до швидкості світла. У граничному випадку, при прямуванні швидкості світла до безмежності, як видно з виразу (10), модуль швидкості руху точки A прямує до класичного значення: $\upsilon_{кл} = \omega r$.

Підставляючи у вирази (7) модуль швидкості у вигляді (10) знаходимо остаточні вирази для прямих і зворотних перетворень координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t' \\ y = x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t' \\ z = z' \\ t = t'\eta \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x' = x\cos\dfrac{\omega t}{\eta} + y\sin\dfrac{\omega t}{\eta} \\ y' = -x\sin\dfrac{\omega t}{\eta} + y\cos\dfrac{\omega t}{\eta} \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t}{\eta} \end{cases} , \quad (11)$$

де: $\eta = \sqrt{1+\dfrac{\omega^2 r^2}{c^2}}$.

Релятивістська енергія тіла при обертальному русі

Для елементу тіла релятивістська енергія дорівнює:

$$dW = \frac{c^2 dm}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad . \tag{12}$$

Підставляючи у вираз (12) швидкість у вигляді (10) та інтегруючи обидві частини рівняння знайдемо релятивістську енергію тіла:

$$W = c^2 \int dm \sqrt{1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \quad . \tag{13}$$

В якості прикладу обчислимо релятивістську енергію для однорідного циліндру масою m, висотою h, радіусу R, густина якого дорівнює ρ у випадку, коли вісь Z напрямлена вздовж осі циліндру:

$$W = c^2 \int dm \sqrt{1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} = \rho c^2 \int_V dV \sqrt{1 + \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} = \frac{2mc^4}{3\omega^2 R^2} \left\{ \left(1 + \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \; .$$

Таким чином, релятивістська енергія циліндру дорівнює:

$$W = \frac{2mc^4}{3\omega^2 R^2} \left\{ \left(1 + \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \quad . \tag{14}$$

Розглянемо випадок, коли: $\frac{\omega^2 r^2}{c^2} \ll 1$. Розкладемо степеневу функцію у ряд Тейлора:

$$\left(1 + \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3\omega^2 R^2}{2c^2} + \frac{3\omega^4 R^4}{8c^4} \quad . \tag{15}$$

Підставляючи розклад (15) у вираз для енергії (14), маємо:

$$W \approx mc^2 + \frac{1}{4} m\omega^2 R^2 \quad . \tag{16}$$

З виразу для енергії (16) випливає, що у граничному випадку релятивістська кінетична енергія обертального руху циліндра збігається з класичною кінетичною енергією обертального руху.

Висновки

У роботі показано, що власна система відліку твердого тіла, при його обертальному русі, стає криволінійною і кожній точці тіла відповідає свій, власний плин часу, який визначається відстанню точки до осі обертання.

Запропонований шлях отримання співвідношень (11), що пов'язують координати точки тіла відносно нерухомої системи K і власної системи відліку K'.

Знайдений вираз (10) для залежності модуля швидкості руху точки тіла від відстані до осі обертання та перевірено узгодження граничних випадків із постулатами спеціальної теорії відносності, тобто, швидкість руху точок тіла відносно нерухомої системи відліку не перевищує швидкість світла.

Одержане співвідношення (13) для знаходження релятивістської енергії тіла при його обертальному русі. Отриманий вираз для релятивістської енергії обертального руху циліндра для випадку, коли вісь обертання збігається з віссю циліндру.

Список використаної літератури

1. *Єжов С. М., Макарець М. В., Романенко О. В.* Класична механіка. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. — 480 с.
2. *Федорченко А. М.* Теоретична механіка. — К.: Вища школа, 1975. — 516 с.
3. *Биденхарн Л., Лаук Дж.* Угловой момент в квантовой физике. Теория и приложения. — М.: Мир, 1984. — Т. 1. — 302 с.
4. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1976. — 664 с.
5. *Боум А.* Квантовая механика: основы и приложения. — М.: Мир, 1990. — 720 с.
6. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. — Л.: Наука, 1975. — 441 с.
7. *Зар Р.* Теория углового момента. О пространственных эффектах в физике и химии. — М.: Мир, 1993. — 352 с.

Анотація

У роботі розглядається рівномірне обертання твердого тіла навколо нерухомої осі з, точки зору спеціальної теорії відносності. Знайдені співвідношення, які пов’язують координати точок тіла, відносно нерухомої системи відліку, з координатами точок тіла, відносно власної системи відліку – системи пов’язаної з тілом. Запропонований шлях знаходження релятивістської енергії обертального руху тіла.

Ключові слова: відносність, обертання, координата, швидкість, енергія.

Аннотация

В работе рассматривается равномерное вращение твердого тела относительно неподвижной оси вращения, с точки зрения специальной теории относительности. Найдены соотношения, которые связывают координаты точек тела, относительно неподвижной системы отсчета, с координатами точек тела, относительно собственной системы отсчета – системы связанной с телом. Предложен путь нахождения релятивистской энергии вращательного движения тела.

Ключевые слова: относительность, вращение, координата, скорость, энергия.