Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2012, том 9, N 2, 105–112

УДК 517.51

Т. В. Гориславець, П. В. Задерей,
О. Б. Нестеренко
(Київський нац. ун-т технологій та дизайну)

Про регулярність лінійних методів підсумовування рядів Тейлора

Знайдено необхідні і достатні умови регулярності лінійних методів підсумовування рядів Тейлора, які визначаються матрицями, що задовольняють умови Боаса–Теляковського.

We obtain necessary and sufficient conditions for regularity of linear summation methods for Taylor series which are defined by matrices that satisfy the conditions Boas–Telyakovskii.

Нехай функція $f(x)$ є сумовною ($f \in L$) і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f;x),$$

де $A_k(f;x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $k = 1, 2, \dots$.

За допомогою трикутної матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$, кожній функції f поставимо у відповідність тригонометричний поліном

$$U_n(f;x;\Lambda) = \lambda_0^{(n)} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f;x).$$

При цьому кажуть, що матриця Λ задає деякий лінійний метод $U_n(\Lambda)$ підсумовування рядів Фур'є, крім цього, має місце рівність

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) K_n(t) dt,$$

де $K_n(t) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \cos kt$.

Метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ називається регулярним в просторі неперервних функцій, якщо для довільної неперервної функції f і для всіх точок x (або рівномірно по x) виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f;x;\Lambda) = f(x). \tag{1}$$

У 1948 році С. М. Нікольський [1, с. 260] сформулював наступне твердження.

Для того щоб для довільної неперервної функції $f(x)$ в довільній точці x виконувалось співвідношення (1) *необхідно і достатньо виконання умов:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1$ *для всіх* $k = 0, 1, 2, \dots$;

б) *існує стала* $M > 0$ *така, що* $\int\limits_0^{2\pi} |K_n(t)|dt \le M < \infty$.

В цьому твердженні перевірка умов а), зазвичай, не викликає труднощів, а умова б) для багатьох методів перевіряється важко. Тому виникає питання про знаходження простіших, нехай і достатніх умов, при яких інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} |K_n(t)|dt$ рівномірно обмежений. Надалі цю задачу будемо називати задачею С. М. Нікольського, оскільки ним [1, с. 261] були отримано перший результат, а саме: якщо числа $\lambda_k^{(n)}$ при кожному фіксованому n утворюють опуклу або вгнуту послідовність, тобто $\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)} \ge 0$ або $\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)} \le 0$ при $k = 1, \dots, n-1$, де $\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)} = \lambda_{k-1}^{(n)} - 2\lambda_k^{(n)} + \lambda_{k+1}^{(n)}$, то необхідними і достатніми умовами виконання співвідношення (1) є виконання умови а) і нерівностей

$$|\lambda_k^{(n)}| \le M, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k}\right| \le M.$$

Тут і далі через M позначаються додатні абсолютні сталі, можливо, не однакові в різних формулах.

Пізніше Б. Надь [2] довів, що умова

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) |\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \le M$$

є достатньою для того, щоб виконувалась умова б).

І. Карамата та М. Томіч [3] покращили оцінку Б. Надя. Ними було показано, що умови а) і

$$\sum_{k=0}^{n-2} q_k^{(n)} |\Delta^2\lambda_k^{(n)}| \le M,$$

де $q_k^{(n)} = \begin{cases} (n-k)\ln\frac{n}{n-k}, & 0 \le k \le n-\sqrt{n}, \\ (n-k)\ln(n-k), & n-\sqrt{n} \le k \le n-2, \end{cases}$ є достатніми для виконання співвідношення (1).

В 1960 році О. В. Єфімов [4, с. 745] узагальнив результати роботи [3]. Він показав, що для довільного тригонометричного полінома $K_n(t)$ справедлива нерівність

$$\int_0^{2\pi} |K_n(t)|dt \le M \left(|\lambda_0^{(n)}| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)}| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k} \right),$$

на основі якої та знайденої С. Сідоном [5] оцінки

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|}{n-k} \le M \int_0^{\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt \right| dt$$

ним було сформульовано наступне твердження.

Якщо послідовність $\{\lambda_k^{(n)}\}$ задовольняє умову

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n} |\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)}| \le M,$$

то для того щоб для будь-якої неперервної функції f в кожній точці x виконувалось співвідношення (1) *необхідно і достатньо виконання умов* а) *і*

в) *існує стала* $M > 0$ *така, що*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k} \le M. \tag{2}$$

С. О. Теляковський [6, с. 1227] замінив умову (2) менш жорсткою умовою і отримав наступний результат.

Якщо для матриці Λ *рівномірно обмежена сума*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\lambda_k^{(n)}| + \sum_{k=2}^{n-2} \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\Delta\lambda_{k-i}^{(n)} - \Delta\lambda_{k+i}^{(n)}}{i} \right| \le M,$$

де $\Delta\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)}$, $q_{n,k} = \min\left(\left[\frac{k}{2}\right], \left[\frac{n-k}{2}\right]\right)$, *то для того щоб для довільної неперервної функції* f *в кожній точці* x *виконувалось співвідношення* (1) *необхідно і достатньо виконання умов* а) *і* в).

Слід відзначити, що умови регулярності при різноманітних припущеннях про члени $\lambda_k^{(n)}$ трикутної матриці одержували Г. О. Фомін [7], Л. В. Тайков [8], Р. М. Тригуб [9], А. А. Захаров [10] і інші.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в крузі $D = \{z : |z| < 1\}$ і неперервна в його замиканні. Множину таких функцій позначимо $A(\overline{D})$.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \ge n$ — трикутна матриця чисел.

Кожній функції $f \in A(\overline{D})$ поставимо у відповідність поліном

$$U_n(f; z; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k z^k.$$

Метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ називається регулярним в просторі аналітичних функцій, якщо для довільної функції $f \in A(\overline{D})$ і для довільної точки $z \in \overline{D}$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f; z; \Lambda) = f(z). \tag{3}$$

У 1962 році Л.В.Тайков [11, с. 627] отримав наступне твердження. *Для того, щоб метод підсумовування* $U_n(\Lambda)$ *був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов* а) *і*

г) *існує число* $M > 0$ *і такий розклад* $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$, *що*

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx\right) \right| \le M. \tag{4}$$

Ним також був наведений приклад матриці Λ, яка визначає метод $U_n(\Lambda)$, що є регулярним в просторі аналітичних функцій і нерегулярним на множині неперервних функцій.

В даній роботі розв'язується задача С. М. Нікольського, тобто умова (4) заміняється умовою більш зручною для перевірки.

Теорема. *Якщо існує число* M *і розклад* $\lambda_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + \beta_k^{(n)}$ *такі, що*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(|\Delta\alpha_k^{(n)}| + |\Delta\beta_k^{(n)}|\right) + \sum_{k=2}^{n-2} \left(\left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\Delta\alpha_{k-i}^{(n)} - \Delta\alpha_{k+i}^{(n)}}{i} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{i=1}^{q_{n,k}} \frac{\Delta\beta_{k-i}^{(n)} - \Delta\beta_{k+i}^{(n)}}{i} \right| \right) \le M, \tag{5}$$

то для того щоб метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ *був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов* а) *і*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(|\beta_k^{(n)}| + |\alpha_{n-k}^{(n)}| + |\beta_{n-k}^{(n)}|\right) \le M. \tag{6}$$

Доведення. С. О. Теляковським [12, с. 73] встановлена наступна рівномірна відносно $m = 0, 1, 2, \ldots$ оцінка

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| dx - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k}{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \right| \le M H_m,$$

де

$$\xi_k = \xi\left(b_k, \sqrt{(a_{m-k} - a_{m+k})^2 + (b_{m-k} - b_{m+k})^2}\right),$$

$$\xi(t, u) = \begin{cases} \frac{\pi|t|}{2}, & |u| \le |t|, \\ |t| \arcsin\left(\frac{|t|}{|u|}\right) + \sqrt{u^2 - t^2}, & |t| < |u|. \end{cases}$$

$$H_m = \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta b_k| +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m-2} \left| \sum_{k=1}^{q_{i,m}} \frac{\Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}}{k} \right| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{\Delta a_{m+i-k} - \Delta a_{m+i+k}}{k} \right| +$$

$$+\sum_{i=2}^{m-2}\left|\sum_{k=1}^{q_{i,m}}\frac{\Delta b_{i-k}-\Delta b_{i+k}}{k}\right|+\sum_{i=2}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{[i/2]}\frac{\Delta b_{m+i-k}-\Delta b_{m+i+k}}{k}\right|,$$

$$q_{i,m}=\min\left(\left[\frac{i}{2}\right],\left[\frac{m-i}{2}\right]\right).$$

Поклавши $m=n$,

$$a_k=\begin{cases}\alpha_k^{(n)}, & 0\le k\le n-1,\\ 0, & k>n-1,\end{cases}$$

$$b_k=\begin{cases}\beta_k^{(n)}, & 0\le k\le n-1,\\ 0, & k>n-1,\end{cases}$$

одержимо (див. [12], наслідок 1)

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\alpha_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k^{(n)}\cos kx+\beta_k^{(n)}\sin kx)\right|dx-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\xi_k\right|\le$$

$$\le M\left(\sum_{k=0}^{n-1}(|\Delta\alpha_k^{(n)}|+|\Delta\beta_k^{(n)}|)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n-2}\left(\left|\sum_{i=1}^{q_{n,k}}\frac{\Delta\alpha_{k-i}^{(n)}-\Delta\alpha_{k+i}^{(n)}}{i}\right|+\left|\sum_{i=1}^{q_{n,k}}\frac{\Delta\beta_{k-i}^{(n)}-\Delta\beta_{k+i}^{(n)}}{i}\right|\right)\right), \qquad (7)$$

де $\xi_k=\xi\left(\beta_k^{(n)},\sqrt{(\alpha_{n-k}^{(n)})^2+(\beta_{n-k}^{(n)})^2}\right)$.

Крім того, в роботі [12, с. 72] встановлено наступні нерівності

$$\xi(t,u)\le\frac{\pi}{2}|t|+|u|,$$

$$\xi(t,u)\ge\frac{\pi}{2}|t|,$$

$$\xi(t,u)\ge|u|.$$

Тобто

$$M_1\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(|\beta_k^{(n)}|+|\alpha_{n-k}^{(n)}|+|\beta_{n-k}^{(n)}|\right)\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\xi_k\le$$

$$\le M_2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(|\beta_k^{(n)}|+|\alpha_{n-k}^{(n)}|+|\beta_{n-k}^{(n)}|\right).$$

Нерівність (7) перепишемо у вигляді

$$M_1\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(|\beta_k^{(n)}|+|\alpha_{n-k}^{(n)}|+|\beta_{n-k}^{(n)}|\right)-MT_n(\alpha,\beta)\le I\le$$

$$\le M_2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\left(|\beta_k^{(n)}|+|\alpha_{n-k}^{(n)}|+|\beta_{n-k}^{(n)}|\right)+MT_n(\alpha,\beta), \qquad (8)$$

де $I=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\alpha_0^{(n)}}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\alpha_k^{(n)}\cos kx+\beta_k^{(n)}\sin kx)\right|dx$,

$$T_n(\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{n-1}(|\Delta\alpha_k^{(n)}|+|\Delta\beta_k^{(n)}|)+\sum_{k=2}^{n-2}\left(\left|\sum_{i=1}^{q_{n,k}}\frac{\Delta\alpha_{k-i}^{(n)}-\Delta\alpha_{k+i}^{(n)}}{i}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{i=1}^{q_{n,k}}\frac{\Delta\beta_{k-i}^{(n)}-\Delta\beta_{k+i}^{(n)}}{i}\right|\right).$$

Необхідність умови (6) випливає з умови (4) і лівої частини нерівності (8). Достатність умови (6) випливає з правої частини нерівності (8). Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо існує число M і розклад $\lambda_k^{(n)}=\alpha_k^{(n)}+\beta_k^{(n)}$ такі, що*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}\left(|\Delta^2\alpha_{k-1}^{(n)}|+|\Delta^2\beta_{k-1}^{(n)}|\right)\le M,$$

то для того щоб метод підсумовування $U_n(\Lambda)$ був регулярним в просторі аналітичних функцій необхідно і достатньо виконання умов а) *і* (6).

При доведенні використовується оцінка, встановлена С. О. Теляковським [6, с. 1233]

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\lambda_k^{(n)}|+\sum_{k=2}^{n-2}\left|\sum_{i=1}^{q_{n,k}}\frac{\Delta\lambda_{k-i}^{(n)}-\Delta\lambda_{k+i}^{(n)}}{i}\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}|\Delta^2\lambda_{k-1}^{(n)}|.$$

Література

[1] Никольский С. М. *О линейных методах суммирования рядов Фурье* // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1948. — **12**. — С. 259–278.

[2] Sz.-Nagy B. *Méthodes de sommation des séries de Fourier. I* // Acta Sci. Math. Szeged. — 1950. — **12**. — Pars B. — P. 204–210.

[3] Karamata J., Tomic M. *Sur la sommation des séries de Fourier* // Глассрпске Акад. наука. — 1953. — **206**, № 5. — P. 89–126.

[4] Ефимов А. В. *О линейных методах суммирования рядов Фурье* // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1960. — **24**. — С. 743–757.

[5] Sidon S. *Über Fourier–Koeffizienten* // J. London Math. Soc. — 1938. — **13**, № 3. — P. 181–183.

[6] Теляковский С. А. *Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приближение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье* // Изв. АН СССР. — 1964. — **28**. — С. 1209–1236.

[7] Фомин Г. А. *О линейных методах суммирования рядов Фурье* // Мат. сб. — 1964. — **65**, № 1. — С. 144–152.

[8] Тайков Л. В. *Новые признаки регулярности треугольных методов суммирования* // Мат. заметки. — 1967. — **1**, № 5. — С. 541–547.

[9] Тригуб Р. М. *Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье* // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1968. — **32**, № 1. — С. 24–49.

[10] Захаров А. А. *О нормах тригонометрических полиномов* // Сиб. мат. журн. — 1968. — **9**, № 1. — С. 67–76.

[11] Тайков Л. В. *О методах суммирования рядов Тейлора* // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1962. — **26**. — С. 625–630.

[12] Теляковский С. А. *Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории апроксимаций* // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. — 1971. — **109**. — С. 65–97.