БАЗЕЛЬСЬКА ПРОБЛЕМА

В історії математики є чимало випадків, коли складна математична проблема залишалася нерозв'язаною протягом десятиліть і навіть століть. Часто в процесі подолання такої проблеми з'являлися нові галузі математики.

Ця стаття присвячена одній із таких проблем, а саме так званій Базельській проблемі (Basel problem), яка полягає в знаходженні суми ряду обернених квадратів усіх натуральних чисел. Проблема вперше постала як виклик європейським математикам 1644 року. Існує навіть легенда про походження цієї проблеми. Наведемо її в скороченому викладі.

Італієць Пьєтро Менголі (Pietro Mengoli (1626-1686)) був математиком за покликанням, а за сумісництвом ще й священнослужителем. А монахи, вони й в Італії монахи – на дозвіллі захоплювалися дегустацією різних вин. Щоб обмежити монахам вживання "благородних напоїв", Пьєтро Менголі вирішив урізати норми видачі вина своїм підлеглим наступним чином:

- першого дня видати звичайну порцію;
- другого дня видати 1/4 частину від початкової;
- третього дня видати 1/9 частину від початкової;
- четвертого дня видати 1/16 частину від початкової;
- п'ятого дня видати 1/25 частину від початкової і т.д.

Що можна сказати про настрій монахів? Дуже швидко вони стали виявляти свою невдоволеність – винний струмочок став невпинно пересихати.

Менголі намагався засобами математики дізнатися про долю монастирського винного льоху, тобто хотів знайти суму числового ряду

$$\boxed{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots},$$

але в нього нічого не вийшло – раптово збунтувалися монахи, їм не сподобалися нелюдські досліди над ними і експерименти довелося припинити. А ось математична проблема залишилася нерозв'язаною на багато років.

Першими математиками світового рівня, що намагалися знайти суму ряду обернених квадратів (Basel problem), були швейцарці, брати Якоб Бернуллі (1654-1705) та Йоганн Бернуллі (1667-1748). Задача названа так, тому що Базель (Швейцарія) – їх рідне місто.

Та стати тріумфатором Базельської проблеми судилося геніальному Леонарду Ейлеру (1707 – 1783), початковий період життя якого теж пов'язаний із Базелем. Леонард Ейлер – найпродуктивніший математик в історії. Він писав свої наукові праці легко й невимушено, як досвідчений літератор пише листи друзям. За час своєї наукової діяльності вчений написав більше 880 праць, у тому числі ряд багатотомних монографій.

Із своєї плідної наукової діяльності (близько 60 років) Ейлер 31 рік віддав Петербурзькій Академії наук, у виданнях якої за життя опублікував біля 400 праць, а ще протягом 80 років Академія продовжувала видавати неопубліковані за життя його праці. Учений був обраний академіком (і почесним академіком) у восьми країнах світу. Він залишив видатні праці в різних галузях математики, механіки, фізики, астрономії, у прикладних науках. Але в першу чергу він, без сумніву, був математиком.

Леонард Ейлер, син Пауля Ейлера і його дружини Маргарити Брюкер, мабуть, є найвидатнішим ученим з усіх тих, хто походить зі Швейцарії. Він народився в Базелі 15 квітня 1707 р., але вже наступного року разом з батьками переїхав у невелике сусіднє селище Рюген з населенням біля тисячі жителів, де його батько став пастором.

Батько Леонарда за молодих літ вивчав математику під керівництвом Якоба Бернуллі. Інтерес до математичних знань не залишав пастора протягом усього життя. То ж не дивно, що навчаючи сина грамоти, батько збудив у нього інтерес до математики. Хоча батько Леонарда все ж таки хотів бачити сина своїм наступником у приході.

Діставши початкову домашню освіту, Леонард вступив до гімназії в Базелі, де жив під наглядом своєї бабусі. Гімназія була в ті часи в поганому стані: грубі та малокваліфіковані вчителі, з одного боку, і запущені учні – з іншого, псували життя один одному. Не кажучи вже про постійні бійки між учнями, траплялось, що й учителі іноді займались рукоприкладством. Звичайно, ґрунтовних знань така гімназія не могла дати.

Але чиновницька кар'єра вимагала отримання атестата, знання деяких розділів математики; тому багато з учнів брали репетиторів, за звичай студентів, які могли за один день навчити більшому, ніж гімназія за тиждень. У Леонарда теж з'явився приватний учитель – Йоганн Буркгардт, який передбачив своєму учневі велике майбутнє.

20 жовтня 1720 р. 13-річний Леонард Ейлер став студентом факультету мистецтв Базельського університету. Університет того часу був невеликим: 19 професорів навчали трохи більше 100 студентів. Однак серед викладачів був Йоганн Бернуллі – зірка першої величини на небосхилі світової науки. Лейбніц на той час вже пішов з життя, а Ньютон був у похилому віці – і Йоганн Бернуллі по праву вважався першим математиком світу. Цей видатний базельський математик був різнобічно обдарованою особистістю, полюбляв літературу, був доктором медицини і, головне – блискучим педагогом. Про нього Вольтер писав: "Розум його сприймав істину, а серце відчувало справедливість".

Леонард мав гостру пам'ять і допитливий, кмітливий розум. Він швидко і легко опанував курс наук і вже в 1722 р. отримав першу ступінь "prima laurea", що відповідає ступеню бакалавра. У вільний час він відвідував лекції з математики, які читав Йоганн Бернуллі. Й. Бернуллі звернув увагу на неабиякі математичні здібності хлопчика й почав працювати з ним окремо – протягом декількох років Ейлер кожної суботи проводив певний час у сім'ї професора. Леонард подружився з синами Йоганна Бернуллі – Миколою та Даніїлом, які поглиблено вивчали фізику і математику. Дружба з братами Бернуллі й визначила подальший життєвий шлях Ейлера.

1725 р. брати Бернуллі були запрошені в члени Петербурзької Академії наук, нещодавно заснованої імператрицею Катериною I за проектом Петра I. Саме за сприяння братів Бернуллі в 1726 р. Леонард Ейлер також отримав запрошення до Петербурзької Академії наук.

Зростання авторитету Ейлера знайшло своєрідне відбиття в листах до нього його вчителя Й. Бернуллі. 1728 р. Бернуллі пише: “даровитий юний муж”, 1737 р.: “знаменитий і винахідливий математик”, 1745 р.: “незрівнянний Леонард Ейлер – глава математиків”. Ще Бернуллі пише: “Я присвятив себе дитинству вищої математики. Ви, мій друже, продовжите її становлення у зрілості” – справді пророчі слова талановитого вчителя до свого видатного учня.

Не було такої галузі, в якій Ейлер не досяг би фундаментальних результатів. Кількість його наукових праць – вражаюча. Перед смертю він якось зауважив, що Петербурзькій академії знадобиться сорок років, щоб розібрати його архів. Він помилився. Це зайняло вісімдесят років.

У період роботи в Петербурзькій Академії наук Леонард Ейлер розв’язав знамениту Базельську проблему. Сплеск творчого натхнення зійшов на вченого 1735 р., коли він виявив дивовижну винахідливість та інтуїцію і встановив, що ряд обернених квадратів збігається до числа $\pi^2/6$, тобто:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots=S=\frac{\pi^2}{6}} \qquad [E]$$

Наведений вище результат складає суть Basel problem.

Спочатку всі спроби Ейлера отримати точний результат не проходили. Він знайшов кілька наближених формул для суми. Причому для практичних застосувань – цілком прийнятних (точність: сім вірних цифр).

На той час був добре відомим наступний результат:

якщо многочлен n–го степеня $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ має n різних відмінних від нуля коренів $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$, то справедливим, зокрема, є співвідношення:

$$\frac{a_1}{a_0}=-\left[\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}\right] \qquad [1]$$

Це співвідношення є очевидним наслідком узагальненої теореми Вієта.

Ейлер розглядає рівняння: $\dfrac{\sin x}{x}=0$,

усі корені якого добре відомі: $\pm\pi$; $\pm 2\pi$; $\pm 3\pi$ і т. д.

Представимо $\sin x$ у вигляді нескінченного ряду, і після скорочення на x отримаємо рівняння "нескінченного степеня": $1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dfrac{x^6}{7!}+\ldots=0$;

а після заміни $t=x^2$ отримаємо рівняння: $1-\dfrac{t}{3!}+\dfrac{t^2}{5!}-\dfrac{t^3}{7!}+\ldots=0$,

коренями якого є числа π^2; $4\pi^2$; $9\pi^2$.

Цілком природно, що цих коренів нескінченно багато. А тепер припустимо, що для цього рівняння виконується співвідношення [1]. Відразу отримаємо:

$$\frac{-1/3!}{1}=-\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots\right],\ \text{тобто:}\ \frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right],$$

звідки вже остаточно: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Ключовий момент у доведенні – смілива ідея поширити відомі співвідношення для алгебраїчних многочленів на нескінченні ряди. Із формальних позицій ортодоксального математика Ейлер нічого не довів. Звичайно, сам він розумів це краще за інших. Але вже знаючи наперед "правильну" відповідь, у кінці кінців Ейлер знайшов суттєво інше, абсолютно строге доведення. Також було встановлено, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$, і т.д.

Отримаємо видатний результат Ейлера $[E]$ ще двома іншими, до того ж різними шляхами.

1. $\downarrow$ Наведемо два відомих, факти, що стануть нам у нагоді в подальшому:

$$\int_0^1\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{bmatrix} x=\sin t & x_2=1 \;\; t_2=\pi/2 \\ dx=\cos tdt & x_1=0 \;\; t_1=0\end{bmatrix}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}tdt=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}. \qquad [2]$$

Цей відомий результат $[2]$ доведено наприкінці статті.

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots,\quad x\in(-1;1). \qquad [3]$$

Здійснимо над інтегралом $\int_0^1\frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(\pi/2)^2}{2}=\frac{\pi^2}{8}$ наступні перетворення:

$$\int_0^1\frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_0^1\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\int_0^1\frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^2}}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}+\ldots=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots.$$

Таким чином, $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$.

Легко бачити, що шукана сума дорівнює:

$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right],$$

тобто: $S=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\cdot S$, звідки остаточно: $S=\frac{\pi^2}{6}$, що й треба було довести. $\uparrow$.

2. Розвинемо в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$, $x\in(-\pi;\pi]$ і знайдемо суми рядів: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

$\downarrow$ Оскільки задана функція парна, то всі коефіцієнти $b_n=0$,

а коефіцієнти a_0 і a_n знайдемо за відомими формулами:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} x^2\cdot\cos nx dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} =$$

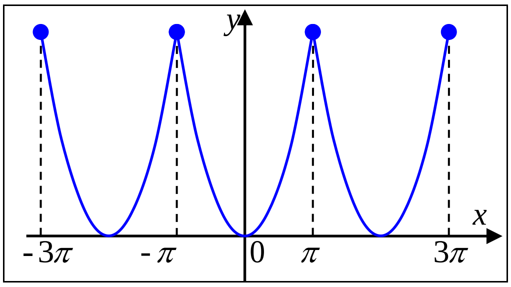
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\cdot\frac{1}{n}\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(0 - \frac{2}{n}\cdot\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx dx\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cdot\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{-4}{\pi\cdot n}\cdot\left(-\frac{\pi}{n}\cos \pi n + \frac{1}{n^2}\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{-4}{\pi\cdot n}\cdot\left(-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^n + 0\right) = \frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n .$$

Отже, $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x\in[-\pi;\pi].$ [4]

Цей розклад даної періодичної і всюди неперервної функції справедливий при будь-якому значенні x, тобто отриманий ряд Фур`є збігається до даної функції на всій числовій осі. Графік функції і графік суми її ряду Фур'є повністю співпадають.



Покладаючи в отриманому розкладі [4] $x = \pi$, маємо:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n,$$

тобто: $\frac{2\pi^2}{3} = 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n$, звідки: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

А покладаючи в тому ж розкладі [4] $x = 0$, маємо:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos 0,$$

тобто: $-4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$, звідки: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$. ↑.

Результат $[E]$ має не тільки багато різних підтверджень (доведень), а й широкий спектр різноманітних застосувань. Для прикладу розглянемо лише дві задачі.

Задача 1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x} dx$.

$\downarrow$ Скориставшись логарифмічним рядом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1;1],$$

отримаємо розклад підінтегральної функції, який дійсний для всіх $x \in [0;1]$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots.$$

Проінтегруємо почленно і отримаємо:

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n^2} + \ldots \right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Як уже відомо, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$; тому $I = \frac{\pi^2}{12}$. $\uparrow$.

Задача 2. {П.Л. Чебишов}. Обчислити імовірність p того, що два навмання вибраних натуральних числа m і n виявляться взаємно простими.

Зауважимо, що від Леонарда Ейлера бере свій початок знаменита Петербурзька математична школа. До неї належав і видатний російський математик Пафнутій Львович Чебишов (1821 – 1894). І хоча Чебишова відділяє від Ейлера ціле століття, у його творчості відчувається дух ейлеревої математики, ейлерова захопленість властивостями натуральних чисел, ґрунтовне вивчення властивостей конкретних функцій і розв'язання важливих прикладних задач.

$\downarrow$ Імовірність того, що m і n не є одночасно парними, дорівнює: $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (від одиниці ми відняли імовірність того, що m і n одночасно парні).

Імовірність того, що m і n не є одночасно кратними числу 3, знайдемо аналогічно; вона дорівнює: $1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$. Так само імовірність того, що m і n не є одночасно кратними числу 5, дорівнює: $1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$; і т.д. (послідовно розглянемо всі прості числа).

Отже, нам треба обчислити $p = [1 - (1/2)^2] \cdot [1 - (1/3)^2] \cdot [1 - (1/5)^2] \cdot \ldots$.

Розглянемо величину, обернену до шуканої:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1 - (1/2)^2} \cdot \frac{1}{1 - (1/3)^2} \cdot \frac{1}{1 - (1/5)^2} \cdot \ldots.$$

Представимо кожний множник останнього виразу як суму членів нескінченної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{1 - (1/2)^2} = 1 + (1/2)^2 + (1/4)^2 + (1/8)^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-(1/3)^2}=1+(1/3)^2+(1/9)^2+(1/27)^2+\ldots$$
$$\frac{1}{1-(1/5)^2}=1+(1/5)^2+(1/25)^2+(1/125)^2+\ldots$$
і так далі.

Перемножуючи всі ці вирази, отримаємо:
$$\frac{1}{p}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\ -$$
той самий, відомий нам результат $[E]$.

В останній сумі обов'язково з'явиться (і до того ж тільки один раз) доданок $\frac{1}{k^2}$, де k – довільне натуральне число. Це автоматично випливає з можливості і єдиності розкладу числа k на прості множники.

Таким чином, шукана імовірність дорівнює: $p=\frac{6}{\pi^2}\approx 0{,}608$. ↑.

Дещо про дзета-функцію Рімана

Як зазначалося вище, Базельська проблема полягає в знаходженні суми ряду обернених квадратів. Зрозуміло, що при узагальненні цієї проблеми можна ставити питання про знаходження сум рядів обернених кубів, четвертих, п'ятих, шостих степенів і т.д. Таке узагальнення призводить до розгляду поняття дзета-функції Рімана.

Дзета-функція Рімана $\zeta(s)$ визначається за допомогою узагальненого гармонічного ряду (ряду Діріхле):
$$\boxed{\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+\ldots}$$

Обчислення значень дзета-функції в різних точках є складними математичними задачами. Зокрема, задача обчислення $\zeta(2)$ є Базельською проблемою. Зазначимо, що Ейлер отримав наступні результати:
$$\boxed{\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}},$$

$$\boxed{\zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}}$$

Перебуваючи під впливом цих знаменитих результатів Леонарда Ейлера, мало хто з математиків не ставив собі за мету обчислити суму ряду обернених кубів, тобто суму $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Ця проблема викликає величезну зацікавленість математиків ось уже близько трьох століть.

Ще 1735 р. Леонард Ейлер обчислив 16 вірних цифр цього числа:

$$\zeta(3) = 1,202056903159594...,$$

а 1978 р. математик греցько-французького походження Роже Апері довів, що число $\zeta(3)$ – ірраціональне {Roger Apery, (1916 – 1994)}. На честь ученого число $\zeta(3)$ назвали сталою Апері. Числове значення цієї сталої виражається нескінченним неперіодичним десятковим дробом:

$\zeta(3)$ = 1,202 056 903 159 594 285 399 738 161 511 449 990 764 986 292 …

Невідомо, чи є стала Апері трансцендентним числом.

У вересні 2010 р. японський інженер Aleksander J. Yee визначив понад трильйон вірних цифр числа $\zeta(3)$. У наш час усі математики світу погоджуються з тим, що для обчислення суми ряду обернених кубів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ у скінченному вигляді вкрай потрібен новий Ейлер, а саме Ейлер XXI століття!

Для парних степенів отримано наступний результат:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{B_{2n}\cdot(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!},$$

де B_{2n} – число Бернуллі з номером $2n$.

Числа Бернуллі визначаються за формулою $\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}$.

Зазначимо, що 2001 р. Вадим Зудилін довів, що серед чисел $\zeta(2n+1)$ є нескінченно багато ірраціональних. Він же довів, що хоча б одне з чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ є ірраціональним.

То ж, шановні читачі, поспішайте творити і відкривати невідоме. Ми зичимо Вам успіхів, зокрема в знаходженні суми ряду обернених кубів, тобто числа

$$\boxed{\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{8^3}+\ldots = ???}$$

Додаток. Доведемо результат [2], тобто обчислимо інтеграл:

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

↓ Для коректності наступного перетворення вважатимемо, що $n \geq 2$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,dx = \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 x)\cdot\sin^{n-2}x\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx - \int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx. \qquad [*]$$

Останній інтеграл обчислимо частинами, поклавши:

$$u = \cos x,\quad du = -\sin x\,dx,\quad dv = \sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx,\quad v = \frac{\sin^{n-1}x}{n-1}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx = \frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1}\Bigg|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \cdot \sin x dx =$$

$$= [0-0] + \frac{1}{n-1} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx . \qquad [**]$$

Таким чином, підставивши результат $[**]$ у формулу $[*]$, отримаємо:

$$I_n = I_{n-2} - \left[0 + \frac{1}{n-1} \cdot I_n\right], \text{ звідки: } I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2} . \qquad [***]$$

При $n=0$ маємо: $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$; тому згідно формули $[***]$:

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{3}{4} \cdot I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_6 = \frac{5}{6} \cdot I_4 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{і т.д.}$$

При $n=1$ маємо: $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1$; тому з формули $[***]$:

$$I_3 = \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5} \cdot I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \quad I_7 = \frac{6}{7} \cdot I_5 = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \quad \text{і т.д.}$$

Остаточно отримаємо:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k}, & \text{якщо } n = 2k; \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{2k}{2k+1}, & \text{якщо } n = 2k+1. \end{cases} \uparrow.$$

О.О. Мазурок, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
М.В. Шмигевський, кандидат фізико-математичних наук, доцент