НЕСПОДІВАНА ПРИСУТНІСТЬ ТРИГОНОМЕТРІЇ

Розглянемо кілька нестандартних задач, сподіваючись, що запропонований метод їх розв'язку є вартим уваги. Всі задачі мають спільну особливість: в їх умовах зовсім не фігурують тригонометричні функції, але найкращим (з відомих) способів їх розв'язку є спосіб переведення задачі на мову тригонометрії.

Задача 1[1]. Знайти найбільше значення виразу $z = x^3 y - xy^3$,
якщо виконується умова $x^2 + y^2 = 1$.

↓ Нехай $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$;

тоді: $z = \cos^3 t \cdot \sin t - \cos t \cdot \sin^3 t =$

$$= \cos t \cdot \sin t \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) = 0{,}5 \cdot \sin 2t \cdot \cos 2t = 0{,}25 \cdot \sin 4t.$$

Отже, $z = 0{,}25 \cdot \sin 4t$

і ясно, що найбільше значення розглядуваного виразу: $z_{MAX} = 0{,}25$. ↑.

Задача 2. Обчислимо вираз $t = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots$, який відомий як перший в історії математики приклад *нескінченного добутку*.

↓ З відомої формули $\cos\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$, яка справедлива для всіх $x \in (0;\pi)$,

маємо: при $x = \dfrac{\pi}{2}$ $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

при $x = \dfrac{\pi}{4}$ $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

при $x = \dfrac{\pi}{8}$ $\cos\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ і т. д.

Таким чином, шуканий вираз t може бути записаний у вигляді:

$$t = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{16}} \cdot \ldots = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \ldots}$$

Знаменник в останньому дробі обчислюється просто.

Поклавши $x = \pi/2$ у відомому результаті Ейлера[2]

$$\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n} \cdot \ldots = \frac{\sin x}{x} \quad [E],$$

легко отримати, що $\cos\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{\pi}{16} \cdot \ldots = \dfrac{\sin \pi/2}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$.

---

[1] VII міжнародна олімпіада "Інтелектуальний марафон", усний тур; Анталія, 1997.

[2] цей результат доведено в додатку 1.

Отже, $t=\frac{\pi}{2}$ – результат, вперше отриманий Франсуа Вієтом[3]. ↑.

<u>Задача 3.</u> Послідовність чисел задана умовами:

$$h_1=\frac{1}{2},\ \ h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}},\ \ n\in N.$$

Довести, що для всіх $n\in N$ сума $h_1+h_2+h_3+\ldots+h_n$ не перевищує $1{,}025$.

↓ Очевидно, що $h_n<1$ для всіх $n\in N$; нехай $h_n=\sin\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

$$\text{тоді}\ \ h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}.$$

За умовою $h_1=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, тому $h_2=\sin\frac{\pi}{12}$, $h_3=\sin\frac{\pi}{24}$, …, $h_n=\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$.

Як відомо[4], $\sin\alpha<\alpha$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, тому:

$$h_1+h_2+h_3+\ldots+h_n=\frac{1}{2}+\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{24}+\ldots+\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}<$$

$$<\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{24}+\ldots+\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}_{(*)}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}<\frac{3+3{,}15}{6}=1{,}025,$$ що й треба було довести.

(Ми скористались тим, що сума $(*)$ – це сума $(n-1)$ членів спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1=\frac{\pi}{12}$ і знаменником $q=\frac{1}{2}$;

ця сума очевидно менше суми всіх членів прогресії $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{\pi}{12}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$). ↑.

<u>Задача 4[5].</u> *Довести, що з будь-яких чотирьох додатних чисел можна вибрати два (нехай це будуть x і y) так, щоб виконувалась нерівність*:

$$0<\frac{x-y}{1+x+y+2xy}<2-\sqrt{3}.$$

↓ Нехай $x_1<x_2<x_3<x_4$ – задані додатні числа.

Запишемо досліджуваний вираз у вигляді:

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy}=\frac{(xy+x)-(xy+y)}{xy+y+x+1+xy}$$

і, поділивши почленно чисельник і знаменник останнього дробу на xy, отримаємо:

[3] Francois Viète, 1540-1603.
[4] цей результат доведено в додатку 2.
[5] I міжнародна олімпіада "Інтелектуальний марафон"; Ашхабад, 1991

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy}=\frac{(1+1/y)-(1+1/x)}{1+1/x+1/y+1/xy+1}=\frac{(1+1/y)-(1+1/x)}{(1+1/y)(1+1/x)+1}.$$

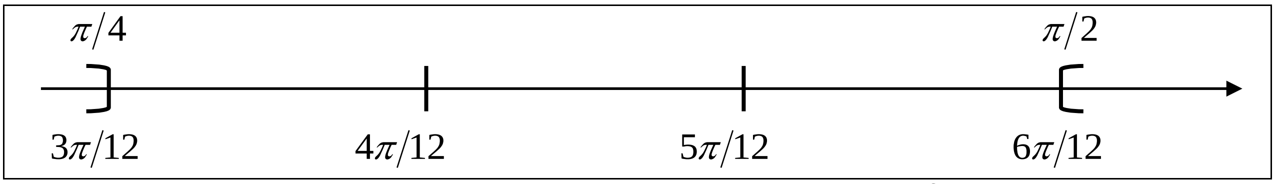
Впізнавши в останньому дробі формулу для тангенса різниці двох кутів, зробимо заміни: $(1+1/y)=tg\alpha$, $(1+1/x)=tg\beta$; і отримаємо:

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{tg\alpha\cdot tg\beta+1}=tg(\alpha-\beta).$$

При цьому оскільки $y>0$ і $x>0$ (за умовою),
то $1<1+1/y<+\infty$ і $1<1+1/x<+\infty$, тобто:

$$1<tg\alpha<+\infty \text{ і } 1<tg\beta<+\infty,$$

а тому числа $\alpha=arctg(1+1/y)$ і $\beta=arctg(1+1/x)$
належать інтервалу $(\pi/4;\pi/2)$.



Розглянувши рисунок, скористаємось *принципом Діріхле*[6]:
в трьох "клітках"
(це інтервали $(3\pi/12;4\pi/12)$, $(4\pi/12;5\pi/12)$ і $(5\pi/12;6\pi/12)$)
сидять чотири "зайці"
(це числа $arctg(1+1/x_1)$, $arctg(1+1/x_2)$, $arctg(1+1/x_3)$ і $arctg(1+1/x_4)$).
Ясно, що в одній з "кліток" сидить два "зайці".

Таким чином, серед чисел $arctg(1+1/x_i)$, $(i=1,2,3,4)$
обов'язково знайдуться два, різниця яких менша, ніж $\pi/12$.
(Зрозуміло, що якщо при деякому $i=1,2,3,4$ виявиться, що

$$arctg(1+1/x_i)=4\pi/12 \text{ чи } arctg(1+1/x_i)=5\pi/12,$$

то зроблений нами висновок очевидно залишиться в силі.)

Отже, $tg(\alpha-\beta)<tg(\pi/12)=2-\sqrt{3}$[7], що й треба було довести. ↑.

В 1935 році в Москві відбулась перша математична олімпіада серед школярів. Вона викликала жвавий інтерес педагогічної і наукової спільноти в багатьох країнах. На другу олімпіаду запропонував свою задачу відомий англійський фізик-теоретик, лауреат Нобелівської премії з фізики 1933 року Поль Дірак (Paul Dirac).

Задача формулювалась так:

---

[6] користуватимемось найбільш поширеним формулюванням цього принципу: *якщо кролики розсаджені в клітки, причому кроликів більше, ніж кліток, то принаймні в одній клітці міститься більше, ніж один кролик*. - *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1834.*

[7] $tg(\pi/12)=\dfrac{1-\cos(\pi/6)}{\sin(\pi/6)}=\dfrac{1-\sqrt{3}/2}{1/2}=2-\sqrt{3}.$

представити довільне натуральне число як вираз,
що містить лише три двійки і довільні математичні знаки.

Відповідь проста і красива: $\boxed{N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{N}}$.

Продемонструємо, що для розв'язку *задачі Дірака* достатньо і <u>однієї</u> двійки!

↓ Як відомо, $\sin arcctg b = \dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}}$; $ctg arcctg d = \dfrac{1}{d}$; тому

$$ctg arctg \sin arcctg b = \sqrt{b^2+1}.$$

Розглянемо перетворення, яке деякому числу x
ставить у відповідність число $ctg arctg \sin arcctg x = \sqrt{x^2+1}$;

записуватимемо це так: $f^1(x) = \sqrt{x^2+1}$,
а результат послідовного застосування до числа x k таких перетворень (суперпозицій функції $ctg arctg \sin arcctg$), позначатимемо так: $f^k(x)$.
Поклавши $x = 2$, послідовно отримаємо: $f^1(2) = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5} = \sqrt{2^2+1}$;

$$f^2(2) = \sqrt{(\sqrt{5})^2+1} = \sqrt{6} = \sqrt{2^2+2};$$

$$f^3(2) = \sqrt{(\sqrt{6})^2+1} = \sqrt{7} = \sqrt{2^2+3}\ldots$$

Легко здогадатись, що взагалі: $f^k(2) = \sqrt{2^2+k}$,
і застосувавши $k = N^2 - 2^2$ (для будь-якого натурального $N \geq 2$)
розглядуваних перетворень, отримаємо: $f^k(2) = \sqrt{2^2 + (N^2 - 2^2)} = N$.

Отже, для натуральних чисел $N \geq 2$
шукане представлення має вигляд: $\boxed{N = \underbrace{ctg arctg \sin arcctg}_{N^2-2^2} 2}$.

Для числа $N = 1$ потрібне представлення запишемо окремо:

$$\boxed{1 = ctg \arcsin tg arcctg \sqrt{2}}.$$

Зауваження: представлення числа 1 ми отримали,
тричі застосувавши до числа 2 "обернене перетворення" $ctg \arcsin tg arcctg$;
при цьому послідовно отримуватимемо:

$$f^{-1}(2) = ctg \arcsin tg arcctg 2 = \sqrt{3},$$

$$f^{-2}(2) = ctg \arcsin tg arcctg \sqrt{3} = \sqrt{2},$$

$$f^{-3}(2) = ctg \arcsin tg arcctg \sqrt{2} = 1.$$

Додаток 1. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}\right]$.

↓ $$\lim_{n\to\infty}\left[\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin\frac{x}{2^n}} = \sin x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{x \cdot \sin\frac{x}{2^n}} = \left[\frac{x}{2^n} = \alpha \quad \begin{matrix} n \to \infty \\ \alpha \to 0 \end{matrix} \right] =$$

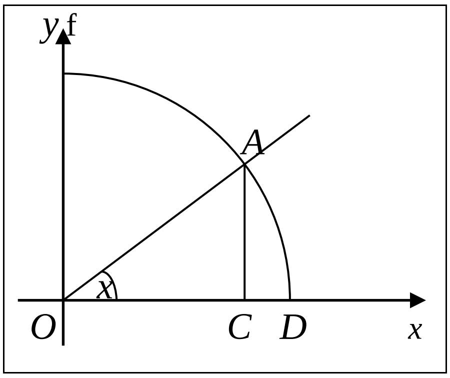
$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin x}{x}. \ \uparrow.$$

Результат $\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n} \cdot \ldots = \frac{\sin x}{x}$ $[E]$

вперше отримав Леонард Ейлер {Leonhard Euler, 1707 – 1783)}. ↑.

Додаток 2. Доведемо, що $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

↓ Візьмемо коло з центром в початку координат, виберемо на цьому колі точки A і D (див. рисунок) і позначимо радіанну міру кута $\angle AOD$ через x, $0 < x < \pi/2$. Точка C – проекція точки A на вісь Ox.



Ясно, що площа трикутника AOD менша площі кругового сектора AOD:

$$S_\Delta AOD < S_{сектора} AOD, \text{ тобто:}$$

$$\frac{1}{2} AC \cdot OD < \frac{1}{2} OD^2 \cdot x,$$

а розділивши обидві частини цієї нерівності на $\frac{1}{2} OD^2$, і врахувавши, що $\frac{AC}{OD} = \frac{AC}{OA} = \sin x$, отримаємо: $\sin x < x$. ↑.

О.О. Мазурок, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
М.В. Шмигевський, кандидат фізико-математичних наук, доцент