ТРИКУТНІ ЧИСЛА

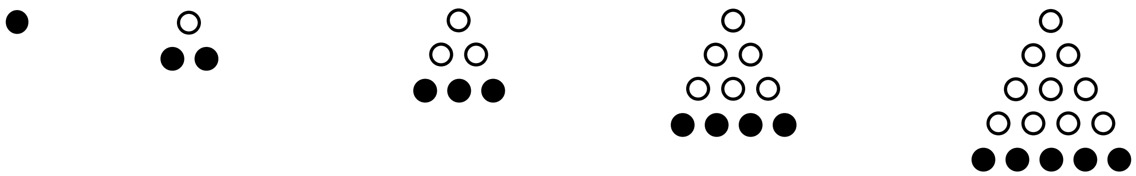
"Елементарну теорію чисел слід вважати одним з найкращих предметів для початкової математичної освіти. Вона потребує дуже мало попередніх знань, а предмет її зрозумілий і близький; методи міркувань, які вона застосовує, – прості, загальні і нечисленні; серед математичних наук немає рівної їй у звертанні до природної людської цікавості"

(Го́дфрі Ха́рольд Ха́рді (англ. Godfrey Harold Hardy; 1877 – 1947) – англійський математик, відомий своїми працями з теорії чисел і математичного аналізу)

Чарівний світ чисел! Мабуть його таємниці нікого не залишають байдужим. Ще задовго до нашої ери стародавні мудреці, комбінуючи натуральні числа, складали з них дивовижні ряди, надаючи елементам цих рядів той чи інший геометричний зміст.

Найпершою фігурою, пов'язаною з натуральними числами, став трикутник, а точніше, правильний трикутник. Саме ця геометрична фігура дозволяє наочно представити так звані трикутні числа.

Трикутні числа – це такі числа, з яких (маючи певну кількість кружечків або камінчиків) можна викласти правильні трикутники. Ось перші п'ять трикутних чисел:



$t_1 = 1$ $\quad t_2 = t_1 + 2 = 3$ $\quad t_3 = t_2 + 3 = 6$ $\quad t_4 = t_3 + 4 = 10$ $\quad t_5 = t_4 + 5 = 15$

Цілком зрозуміло, що *геометрично* наступне трикутне число можна отримати з попереднього додаванням ще одного "рядка", який містить на один камінчик більше, ніж найнижчий "рядок" попереднього числа (на рисунку кожен новий рядок виділено чорним кольором).

Отже, трикутне число з номером n має вигляд:

$$t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n.$$

Із давніх часів відомо, що сума перших n натуральних чисел може бути обчислена так:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким чином, трикутне число з номером n обчислюється за формулою:

$$\boxed{t_n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Зауважимо, що за поширеною легендою шкільний учитель Карла Гаусса, коли тому було 10 років, запропонував своїм учням знайти суму всіх натуральних чисел від одного до ста. Маленький Карл здивував усіх тим, що практично миттєво знайшов правильну відповідь. Він помітив, що сума кожної пари доданків, однаково віддалених від кінців ряду натуральних чисел 1,…,100, дорівнює 101, а саме: $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, …, $50+51=101$. Оскільки таких пар існує рівно 50, то Гаусс обчислив усно, що шукана сума дорівнює $101\times 50=5050$. Зазначимо, що це був перший науковий успіх Карла Фрідріха Гаусса (Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855), який згодом увійшов до трійки найбільш видатних математиків усіх часів і народів (разом із Архімедом і Ньютоном).

Окрім трикутних чисел існують також числа квадратні, п’ятикутні, шестикутні та ін. Вони пов’язані відповідно з квадратом, правильним п’ятикутником, правильним шестикутником та ін.

Квадратними називають числа виду: $\underbrace{n+n+n+\ldots+n}_{n\text{ доданків}}=n^2=q_n$.

Геометричний зміст квадратних чисел очевидний.

Можна легко переконатись (і аналітично, і геометрично) в тому, що сума двох послідовних трикутних чисел є квадратним числом, а саме:

$$\boxed{t_n+t_{n-1}=q_n}.$$

Так само просто довести й наступні твердження:

якщо t_n – трикутне число, то $8\cdot t_n+1$ – квадратне число (а саме q_{2n+1}), а $9\cdot t_n+1$ – трикутне число (а саме t_{3n+1}).

Подвоєні трикутні числа називають ***прямокутними***; це числа вигляду:

$$n(n+1),\ \text{де}\ n=1,2,3,\ldots$$

Наведемо загальну формулу для обчислення многокутних чисел:

$$\boxed{F_n^{(k)}=\frac{(k-2)n^2-(k-4)n}{2}},$$

де $k-$ показник числа (трикутне, чотирикутне, п’ятикутне і т.д.), $n-$ номер числа у відповідній послідовності многокутних чисел.

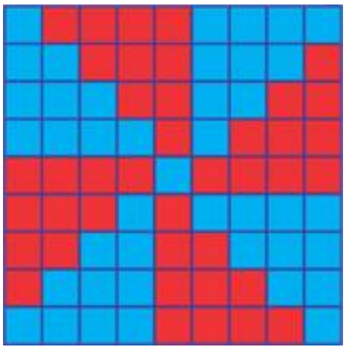
Якщо у вище наведену формулу підставити $k=3$, то отримаємо формулу для трикутних чисел. Аналогічно, якщо у вище наведену формулу підставити $k=4$, то отримаємо формулу для квадратних чисел і т.д.

Многокутні числа були відомі ще в сиву давнину. Припускають, що вперше вони з’явились у VI ст. до н.е. в школі Піфагора. У подальшому багато математиків цікавились цими числами. Про їх властивості доведено чимало важливих і складних теорем.

Давньогрецький математик Діофант знайшов простий зв'язок між трикутними числами і квадратними числами:

$$q_{2n+1} = 8 \cdot t_n + 1.$$

Можна наочно представити цю формулу Діофанта на прикладі трикутного числа $t_4 = 10$. На малюнку зображено 81 клітинки, які розташовані в квадраті. Вони утворюють квадратне число $q_9 = 9^2 = 81$. Одна клітинка займає центр квадрата, а інші 80 чисел згруповано у 8 трикутних чисел у формі восьми "прямокутних трикутників". Отримаємо $81 = 8 \cdot 10 + 1$.



У Новий час многокутними числами займались багато відомих математиків.

Вінцем теорії многокутних чисел стала так звана "**золота теорема Ферма**":

довільне натуральне число – або трикутне, або є сумою не більше, ніж трьох трикутних чисел;

довільне натуральне число – або квадратне, або є сумою не більше, ніж чотирьох квадратних чисел;

довільне натуральне число – або п'ятикутне, або є сумою не більше, ніж п'яти п'ятикутних чисел;

взагалі, довільне натуральне число – або *k-кутне, або є сумою не більше, ніж k k-кутних чисел.*

Перше з тверджень цієї теореми довів **К.Ф. Гаусс**, записавши свій результат у вигляді: $N = \Delta + \Delta + \Delta$.

Друге твердження цієї теореми, спираючись на результати Леонарда Ейлера (Leonhard Euler, 1707 – 1783), довів **Ж.Л. Лагранж** (Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Запишемо його результат у вигляді: $N = \square + \square + \square + \square$.

Повне доведення золотої теореми Ферма зміг дати **О.Л. Коші** (Augustin Louis Cauchy, (1789-1857)).

Зазначимо, що **П'єр де Ферма́** (фр. Pierre de Fermat, 1601 – 1665) – французький математик, один із основоположників аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей і теорії чисел. За фахом був юрист, із 1631 року – радник парламенту в Тулузі. Ферма став широко відомим ученим завдяки формулюванню Великої теореми Ферма, яка була доведена лише наприкінці XX століття англійським математиком Ендрю Уайлсом.

Основні властивості трикутних чисел

- Сума двох послідовних трикутних чисел є квадратним числом.
- Кожне парне досконале число є трикутним числом.
- Довільне натуральне число можна представити у вигляді суми не більше трьох трикутних чисел. Це твердження вперше сформулював 1638 року П'єр Ферма в листі до Мерсенна, а довів 1796 року Карл Гаусс.
- Ціле число m є трикутним тоді і тільки тоді, коли число $8m+1$ є квадратним.

Основні теореми про трикутні числа

Теорема 1. Сума всіх чисел, обернених до трикутних, дорівнює числу 2:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t_n}=2}.$$

Доведення. Маємо обчислити нескінченну суму:

$$S=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}+\frac{1}{t_5}+\ldots=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots,$$

тобто суму ряду: $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t_n}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\frac{1}{t_4}+\ldots+\frac{1}{t_{k-1}}+\frac{1}{t_k}+\ldots.$

Запишемо загальний член ряду у вигляді:

$$u_n=\frac{1}{t_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}.$$

Тоді частинна сума ряду матиме вигляд:

$$S_n=\left[\frac{2}{1}-\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right]+\left[\frac{2}{4}-\frac{2}{5}\right]+\ldots+\left[\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n}\right]+\left[\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right].$$

Отже, $S_n=2-\frac{2}{n+1}$, а тому $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[2-\frac{2}{n+1}\right]=2$,

що й треба було довести.

Наведемо два загальновідомих факти, які нам знадобляться в подальшому:

$$[*]\ \ln(1+1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\ln 2,$$

$$[**]\ arctg1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Зазначимо, що останній результат установив 1673 року Гóтфрід Вільгельм Лéйбніц (нім. Gottfried Wilhelm Leibniz 1646 – 1716) – німецький філософ, логік, математик, фізик, юрист, історик, дипломат, винахідник і мовознавець. Його найважливіші відкриття: Лейбніц, незалежно від Ньютона, заклав основи математичного аналізу – диференціальне та інтегральне числення. Лейбніц створив комбінаторику як науку; лише він один у всій історії математики однаково вільно працював як із неперервними, так із дискретними величинами.

Лейбніц також заклав основи математичної логіки; описав двійкову систему числення з цифрами 0 і 1, на якій ґрунтується сучасна комп'ютерна техніка.

Теорема 2. Має місце рівність:

$$\pi-2=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}-\frac{1}{28}-\frac{1}{36}+\ldots,$$

де в знаменниках у правій частині містяться послідовні трикутні числа, і за двома додатними доданками слідує два від'ємних.

Доведення. Розглянемо праву частину запропонованої рівності. Згідно з теоремою 1 цей ряд є абсолютно збіжним, а тому володіє переставною властивістю. Нехай A – сума доданків, що містяться на непарних позиціях, а B – сума доданків, що містяться на парних позиціях; тобто:

$$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{28}+\ldots \quad \text{і} \quad B=\frac{1}{3}-\frac{1}{10}+\frac{1}{21}-\frac{1}{36}+\ldots.$$

1. Розглянемо першу з запропонованих сум:

$$A=\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{5\cdot 6}-\frac{2}{7\cdot 8}+\ldots,$$

що в свою чергу дорівнює:

$$A=\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)-\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{8}\right)+\ldots.$$

Згрупувавши тепер члени з парними знаменниками, отримаємо:

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots, \text{ що згідно } [*] \text{ дорівнює } -\ln 2.$$

А згрупувавши члени з непарними знаменниками, отримаємо:

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\ldots, \text{ що згідно } [**] \text{ дорівнює } \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $A=\frac{\pi}{2}-\ln 2$.

2. Розглянемо другу з запропонованих сум:

$$B=\frac{2}{2\cdot 3}-\frac{2}{4\cdot 5}+\frac{2}{6\cdot 7}-\frac{2}{8\cdot 9}+\ldots,$$

що в свою чергу дорівнює:

$$B=\left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{6}-\frac{2}{7}\right)-\left(\frac{2}{8}-\frac{2}{9}\right)+\ldots.$$

Згрупувавши тепер члени з парними знаменниками, отримаємо:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots, \text{ що згідно } [*] \text{ дорівнює } \ln 2.$$

А згрупувавши члени з непарними знаменниками, отримаємо:

$$-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{2}{9}-\ldots,$$

звідки (якщо додати і відняти двійку) згідно $[**]$ матимемо:

$$-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{2}{9}-\ldots=\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{2}{9}-\ldots-2=\frac{\pi}{2}-2.$$

Отже, $B=\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$.

Таким чином, маємо: $A+B=\frac{\pi}{2}-\ln 2+\ln 2+\frac{\pi}{2}-2=\pi-2$, що й треба було довести.

Наслідок 1. Результат теореми 2 можна записати у вигляді:

$$\boxed{\pi=2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t_n}}{t_n}},$$

де t_n – трикутне число.

Наслідок 2. Скориставшись результатами наслідку 1 і теореми 1, можна отримати таке представлення числа π:

$$\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{t_n}}{t_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{t_n}}{t_n}=\frac{2}{t_1}+\frac{2}{t_2}+\frac{2}{t_5}+\frac{2}{t_6}+\frac{2}{t_9}+\frac{2}{t_{10}}+\ldots,$$

і остаточно:

$$\boxed{\pi=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{21}+\frac{2}{45}+\frac{2}{55}+\ldots},$$

тобто, ***число π дорівнює подвоєній сумі всіх чисел, обернених до непарних трикутних чисел.***

Лема. Куб довільного натурального числа може бути представлений у вигляді різниці квадратів двох послідовних трикутних чисел.

Доведення. Нехай n – довільне натуральне число; знайдемо такі цілі числа x і y, що задовольнятимуть рівність: $n^3=x^2-y^2$.

Запишемо останню рівність у вигляді: $n\cdot n^2=(x-y)(x+y)$
і надалі шукатимемо такі цілі числа x і y, що є розв'язками системи:

$$\begin{cases} n=x-y; \\ n^2=x+y. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Гаусса. Додамо рівняння цієї системи і отримаємо: $n+n^2=2x$, звідки: $x=\frac{n+n^2}{2}$; віднімемо від другого рівняння перше, отримаємо: $n^2-n=2y$, звідки: $y=\frac{n^2-n}{2}$.

Отже, можливість представлення кубу довільного натурального числа у вигляді різниці квадратів деяких цілих чисел випливає з тотожності:

$$n^3 = \left[\frac{n^2+n}{2}\right]^2 - \left[\frac{n^2-n}{2}\right]^2.$$

Зауваження. Числа $x = \dfrac{n+n^2}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ і $y = \dfrac{n^2-n}{2} = \dfrac{(n-1)n}{2}$ очевидно є цілими, бо кожен чисельник є числом парним – як добуток двох послідовних натуральних чисел.

Те, що числа $y = \dfrac{(n-1)n}{2}$ і $x = \dfrac{n(n+1)}{2}$ є послідовними трикутними (відповідно $(n-1)$-м і n-м), завершує доведення леми.

Нехай $t_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ – k-е за порядком трикутне число; тоді твердження теореми можна записати в символічній формі: $\boxed{k^3 = t_k^2 - t_{k-1}^2}$.

Тепер, покладаючи послідовно $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$, отримаємо:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 =$$
$$= [t_1^{\ 2} - 0^2] + [t_2^{\ 2} - t_1^{\ 2}] + [t_3^{\ 2} - t_2^{\ 2}] + \ldots + [t_{n-1}^2 - t_{n-2}^2] + [t_n^2 - t_{n-1}^2].$$

Розкривши в останній рівності дужки і звівши подібні, отримуємо (і до того ж порівняно простим шляхом!) формулу для обчислення суми кубів n перших натуральних чисел:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = t_n^2.$$

Таким чином, наступне твердження можна вважати доведеним.

Теорема 3. Сума кубів n перших натуральних чисел дорівнює квадрату n-го трикутного числа:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = t_n^2}.$$

Зауваження. Як відомо, щоб знайти біноміальні коефіцієнти в розкладі $(1+x)^n$ за степенями x, можна скористатись *трикутником Паскаля.*

Легко бачити з рисунка, що коефіцієнти при x^2 і x^{n-2} $(n \geq 2)$ є трикутними числами (ці числа закреслені прямими лініями).

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
\cancel{1} \quad 2 \quad \cancel{1} \\
1 \quad \cancel{3} \quad \cancel{3} \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad \cancel{6} \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad \cancel{10} \quad \cancel{10} \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad \cancel{15} \quad 20 \quad \cancel{15} \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad \cancel{21} \quad 35 \quad 35 \quad \cancel{21} \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad \cancel{28} \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad \cancel{28} \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Література

1. Депман И.Я. История арифметики. Пособие для учителей. 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1965.
2. Матвиевская Г. П. Заметки о многоугольных числах в записных книжках Эйлера // Историко-математические исследования. — М.: Наука, 1983. – № 27. – С. 27-49.
3. Р. Хонсбергер. Математические изюминки. – М.: Наука, 1992.
4. Стиллвелл Д. Математика и ее история. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

О.О. Мазурок, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
М.В. Шмигевський, кандидат фізико-математичних наук, доцент