УДК 517.518.4

**Н. М. Задерей** (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
**П. В. Задерей** (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

# ПРО НЕРІВНІСТЬ ЛЕБЕГА НА КЛАСАХ $\bar{\psi}$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

We consider deviations of Fourier sums of spaces $C^{\bar{\psi}}$ and estimates of these deviations are expressed by the best approximation $\bar{\psi}$-derivative functions in the understanding of A.I.Stepanets are obtained. The sequence $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ are quasiconvex.

Рассматривается уклонение сумм Фурье на пространствах $C^{\bar{\psi}}$, причем полученные оценки таких уклонений выражены через наилучшие приближения $\bar{\psi}$-производных функций в понимании А. И. Степанца. Последовательности $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ являются квазивыпуклыми.

Нехай $L$ — простір $2\pi$-періодичних інтегровних за Лебегом функцій $f(\cdot)$ з нормою $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$, а $C$ — простір, який складається з неперервних функцій $f(\cdot)$ з нормою $\|f\|_C = \max_x |f(x)|$.

Введемо деякі позначення. Для $f \in L$ її ряд Фур'є має вигляд

$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x), \tag{1}$$

$S_n(f;x)$ — частинна сума порядку $n$ ряду (1); $\rho_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x)$;

$$E_n(f)_X = \inf_{t_n \in T_n} \big\|f(x) - t_n(x)\big\|_X \tag{2}$$

— найкраще наближення функції $f$ тригонометричними поліномами $t_n(\cdot)$ з $T_n$, де $T_n$ — множина тригонометричних поліномів порядку $n$, а $X$ означає або простір $L$, або $C$.

А. Лебег [1] довів, що

$$\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \le (L_n + 1)E_n(f)_C, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

де $L_n$ — сталі Лебега, тобто норми оператора $S_n(f;x)$, що діє з простору $C$ в $C$.

Оскільки, як відомо [2, с 112],

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + r_n \qquad \forall n \in N, \quad |r_n| \le 3,$$

то співвідношення (3) можна записати у вигляді (див. [1, 2])

$$\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \le \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + R_n\right) E_n(f)_C, \quad |R_n| \le 4. \tag{4}$$

Нерівність (4) є асимптотично точною $\left(\text{з константою } \dfrac{4}{\pi^2}\right)$ на всьому просторі неперервних функцій $C$, але вона не є точною, навіть за порядком, на деяких підмножинах множини $C$.

К. І. Осколков [3] уточнив нерівність (4), показавши, що для будь-якого $f \in C$

$$\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \le K \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} E_{n+k}(f)_C. \tag{5}$$

Тут і далі через $K$ позначено абсолютні додатні сталі, можливо неоднакові в різних формулах. Крім того, в [3] встановлено наступне твердження.

Якщо $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, $k \in N$, — послідовність невід'ємних чисел, що монотонно прямує до нуля і $C_\varepsilon := \big\{f \in C\colon E_n(f)_C \le \varepsilon_n \forall n \in N\big\}$, то існують дві абсолютні сталі $K_1$ і $K_2$ такі, що

$$K_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1} \le \sup_{f\in C_\varepsilon} \big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \le K_2 \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1}. \tag{6}$$

Співвідношення (5) і (6) уточнюють за порядком нерівність (4).

О. І. Степанець (див. [4, 5], а також [6], розділ III, § 11) увів поняття $\bar{\psi}$-похідних і на основі цього поняття визначив класи $C^{\bar{\psi}}C^0$ таким чином.

Нехай $f \in L$, а її ряд Фур'є має вигляд (1), $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, що задовольняє умову

$$\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \ne 0 \quad \forall k \in N.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \widetilde{A}_k(f;x) \right),$$

де $\widetilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то $\varphi$ назвемо $\bar{\psi}$-похідною функції $f$ і будемо писати $\varphi(\cdot) = f^{\bar{\psi}}(\cdot)$. Підмножину неперервних функцій $f \in C$, у які мають $\bar{\psi}$-похідні, позначатимемо через $C^{\bar{\psi}}$.

Якщо $f \in C^{\bar{\psi}}$ і при цьому $f^{\bar{\psi}} \in C^0 = \left\{\varphi \in C\colon \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0\right\}$, то множину таких функцій позначимо через $C^{\bar{\psi}}C^0$.

Нагадаємо ще деякі позначення (див. [6]), які будуть необхідні у подальшому.

$\mathfrak{M}$ означає множину опуклих донизу при $v \ge 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0$;

$\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, що задовольняють умову $0 < \mu(\psi;t) := \dfrac{t}{\eta(t)-t} \le$ $\le K < \infty$, $\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\psi(t)\right)$;

$\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi(\cdot) \in \mathfrak{M}$ таких, що

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt \le K < \infty;$$

$\mathfrak{L}$ — множина пар $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ така, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Psi(x)$.

О. І. Степанець (див. [7], а також [6], розділ V) встановив такий аналог нерівності Лебега (4).

Якщо $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}_0'$, то для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ при довільному $n \in N$

$$\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C \leq \left(\frac{4}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n + \frac{2}{\pi}\int\limits_n^{\infty}\frac{\left|\psi_2(t)\right|}{t}dt + O(1)\bar{\psi}(n)\right)E_n(f^{\bar{\psi}})_C,$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $n \in N$ і по $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$, $\bar{\psi}(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$.

Позначимо через $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon^0$ множину неперервних функцій $f(\cdot)$, $\bar{\psi}$-похідні яких належать до $C_\varepsilon^0 = C_\varepsilon \cap C^0$.

У даній роботі ми замінимо множину $\mathfrak{M}$ більш широкою множиною, а саме, замість опуклості послідовностей $\psi_i$, $i = 1, 2$, будемо вимагати квазівопуклість. Слід зауважити, що подібний результат одержанв Р. М. Тригуб у [12], де, зокрема, знайдено порядок спадання величини $\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C$ на класах, що визначаються обмеженнями на $(\psi,\beta)$-похідні $\left(\psi_1(\cdot) = \psi(\cdot)\cos\beta\frac{\pi}{2},\right.$ $\left.\psi_2(\cdot) = \psi(\cdot)\sin\beta\frac{\pi}{2}\right)$, причому на функцію $\psi(\cdot)$ накладено умови значно слабші, ніж квазіопуклість.

**Теорема 1.** *Нехай*

$$\lim_{k\to\infty}\psi_1(k) = \lim_{k\to\infty}\psi_2(k) = 0, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_2(k)\right|}{k} < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}k\Big(\left|\triangle^2\psi_1(k-1)\right| + \left|\triangle^2\psi_2(k-1)\right|\Big) < \infty, \tag{8}$$

*де* $\triangle^2\psi_i(k-1) = \psi_i(k-1) - 2\psi_i(k) + \psi_i(k+1)$, $i = 1, 2$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in C^{\bar{\psi}}C^0$ *при* $n \in N$ *виконується нерівність*

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k} + \right.$$

$$\left. + O(1)\sum_{k=1}^{\infty}k(|\triangle^2\psi_1(n+k-1)| + |\triangle^2\psi_2(n+k-1)|)\right)E_n(f^{\bar{\psi}})_C, \tag{9}$$

*крім того,*

$$\sup_{f\in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon^0}\left\|\rho_n(f;x)\right\|_C =$$

$$= \left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sqrt{\psi_1^2(n+k) + \psi_2^2(n+k)} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{\left|\psi_2(k)\right|}{k} + \right.$$

$$+O(1)\sum_{k=1}^{\infty} k\Big(\big|\triangle^2\psi_1(n+k-1)\big| + \big|\triangle^2\psi_2(n+k-1)\big|\Big)\Big)\varepsilon_n. \qquad (10)$$

***Доведення.*** Як відомо (див. [9, 10], [6], розділ I, § 8) з умов (7) і (8) випливає, що $\bar{\psi} \in \mathfrak{L}$. Тому для $f^{\bar{\psi}} \in C^0$ у кожній точці $x$ виконується рівність (див. [6], розділ IV, § 1)

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\bar{\psi}}(u)F_n(\bar{\psi};x-u)du,$$

де $F_n(\bar{\psi};t) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx)$.

Крім того, для тригонометричного полінома $t_n^* \in T_n$ найкращого наближення функції $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$ справджується співвідношення

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(f^{\bar{\psi}}(u) - t_n^*\Big)F_n(\bar{\psi};x-u)du,$$

а отже,

$$\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \le E_n\big(f^{\bar{\psi}}\big)_C\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|F_n(\bar{\psi};t)\big|dt.$$

Поклавши $a_k = b_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$, $a_k = \psi_1(k)$, $b_k = \psi_2(k)$, $k = n+1, n+2, \ldots$, і використавши асимптотичну формулу, одержану С. О. Теляковським (див. [11], формула (3.76)), в якій покладено $m = n$, знайдемо

$$\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \le E_n\big(f^{\bar{\psi}}\big)_C\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|F_n(\bar{\psi};t)\big|dt =$$

$$= E_n(f^{\bar{\psi}})_C\left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k} + O(1)R_n\right), \qquad (11)$$

де

$$|R_n| \le K\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} k\Big(\big|\triangle^2\psi_1(n+k-1)\big| + \big|\triangle^2\psi_2(n+k-1)\big|\Big),$$

$$\xi_k = \xi(b_k, \sqrt{(a_{n-k}-a_{n+k})^2 + (b_{n-k}-b_{n+k})^2}),$$

а функція $\xi(t,u)$ визначається рівністю

$$\xi(t,u) = \begin{cases} \dfrac{\pi|t|}{2}, & |u| \le |t|, \\ |t|\arcsin\left(\dfrac{|t|}{|u|}\right) + \sqrt{u^2-t^2}, & |t| < |u|, \end{cases}$$

зокрема $\xi(0,u) = |u|$.

Оскільки $b_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ то формулу (11) можна записати у вигляді

$$\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \leq E_n(f^{\bar{\psi}})_C \left(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sqrt{\psi_1^2(n+k)+\psi_2^2(n+k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+O(1)\sum_{k=1}^{\infty}k\Big(\big|\triangle^2\psi_1(n+k-1)\big|++\big|\triangle^2\psi_2(n+k-1)\big|\Big)\right),$$

що й доводить співвідношення (9).

Оцінка зверху в (10) випливає з (9). Побудуємо функцію $\Phi_n(x) \in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon^0$, на якій досягається рівність у співвідношенні (10). Для цього покладемо

$$g_n(-x) = \mathrm{sign} F_n(\bar{\psi}; x), \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Далі, згладимо функцію $g_n(-x)$, замінивши її в околі точок розриву лінійною. Одержану неперервну функцію позначимо через $\tilde{g}_n(-x)$, $|x| \leq \dfrac{\pi}{2}$. При $\dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi$ визначимо функцію $\tilde{g}_n(-x)$ так, щоб $\tilde{g}_n(-x)$ була неперервною на $[-\pi;\pi]$, $\tilde{g}_n(-\pi) = \tilde{g}_n(\pi)$, $\big|\tilde{g}_n(-x)\big| \leq 1$. Крім того, щоб існувало на $[-\pi;\pi]$ не менше $2n$ точок $c_i$, в яких $\big|\tilde{g}_n(-c_i)\big| = 1$, в цих точках функція $\tilde{g}_n(-x)$ почергово змінює знак, щоб при цьому виконувалась рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}_n(-x)dx = 0.$$

Позначимо $\tilde{\varphi}(n;-x) = \varepsilon_n\tilde{g}_n(-x)$, а через $\Phi_n(-x)$ $\bar{\psi}$-інтеграл функції $\tilde{\varphi}(n,-x)$. Таким чином, $\big(\Phi_n(-x)\big)^{\bar{\psi}} = \tilde{\varphi}(n,-x)$ і найкраще рівномірне наближення функції $\tilde{\varphi}(n,-x)$ буде здійснювати поліном, тотожно рівний нулю.

Оскільки

$$E_n(\tilde{\varphi})_C = \varepsilon_n E_n(\tilde{g}_n) \leq \varepsilon_n,$$

то $\tilde{\varphi} \in C_\varepsilon^0$ і

$$\sup_{f\in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon^0}\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \geq \big\|\rho_n(\Phi_n;x)\big\|_C \geq |\rho_n(\Phi_n;0)| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{\varphi}(n;-u)F_n(\bar{\psi};u)du\right| \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|F_n(\bar{\psi};u)|du - \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}\leq|u|\leq\pi}\big|F_n(\bar{\psi};u)\big|du. \tag{12}$$

З огляду на те, що (див. (11))

$$\sup_{f\in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon^0}\big\|\rho_n(f;x)\big\|_C \leq \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|F_n(\bar{\psi};u)\big|du,$$

на підставі нерівностей (12) і (13) робимо висновок, що

$$\sup_{f\in C^{\bar{\psi}}C^0_\varepsilon} \|\rho_n(f;x)\|_C = \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F_n(\bar{\psi};u)|du+$$

$$+\,O\left(\varepsilon_n \int\limits_{\frac{\pi}{2}\le|u|\le\pi} |F_n(\bar{\psi};u)|du\right). \qquad (13)$$

З (14) і оцінки

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}\le|u|\le\pi} \big|F_n(\bar{\psi};u)\big|du \le K\sum_{k=1}^{\infty} k\Big(\big|\triangle^2\psi_1(n+k-1)\big| + \big|\triangle^2\psi_2(n+k-1)\big|\Big)$$

випливає співвідношення (10), що й доводить теорему.


1. *Lebesǵue H.* Sur la représentation trigonometrique approcheé des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. – 1910. – **38**. – P. 184 – 210.
2. *Дзядик В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
3. *Осколков К. И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 4. – С. 515 – 526.
4. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт/ АН Украины. Ин-т математики; 96.11).
5. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **I**. – 427 с.
7. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274 – 291.
8. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 3. – С. 388 – 400.
9. *Kolmogoroff A.* Sur l′ordre de grandeur des coefficients de la serie de Fourier-Lebesǵue // Bull. Acad. pol. Sér. sci. math. – 1923. – P. 83 – 86.
10. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63(105)**, № 3. – С. 426 – 444.
11. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 65 – 97.
12. *Тригуб Р. М.* Приближение непрерывных периодических функций с ограниченной производной полиномами // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 185 – 195.


Одержано 09.12.11,
після доопрацювання — 30.11.12