УДК 517.5

М. В. Гаєвський, П. В. Задерей (Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка,
Київський національний університет технологій та дизайну)

НАБЛИЖЕННЯ ЗАДАНИХ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НОРМАЛЬНИМИ СЕРЕДНІМИ ЗІГМУНДА ЇХ РЯДІВ ФАБЕРА

The exact order estimates of the deviations of analytic functions, which are defined in a bounded domain and which are continuous on its closure, of their normal Zigmund averages are obtained in this paper.

В роботі одержано точні порядкові оцінки для відхилень аналітичних в обмеженій області та неперервних на її замиканні функцій від їх нормальних середніх Зігмунда.

Нехай Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, межею якої є замкнена жорданова крива Γ. Внаслідок теореми Рімана існує єдине відображення $w = \Phi(z)$, що конформно та однолисно відображає зовнішність області Ω на зовнішність одиничного круга $\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ при умовах

$$\Phi(\infty) = \infty,$$

$$\Phi'(z) = \gamma > 0.$$

Обернене до $w = \Phi(z)$ відображення позначимо $z = \Psi(w)$, а многочлени Фабера для області Ω будемо позначати через $F_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ [3, с. 52].

Нехай далі $A(\overline{\Omega})$ — множина функцій f, аналітичних в області Ω та неперервних в $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$. Коефіцієнти Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$ обчислюються за формулами [3, с. 107]

$$a_\nu(f) = a_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{f(\Psi(w))}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta, \quad (1)$$

де $\Phi'(z)$ має майже скрізь на Γ кутові граничні значення, які утворюють функцію, інтегровну на Γ, а ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu F_\nu(z) \tag{2}$$

є рядом Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$.

Введемо такі позначення: $p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$ — алгебраїчний многочлен степеня n з комплексними коефіцієнтами c_ν; P_n — множина всіх алгебраїчних многочленів $p_n(z)$; $E_n(f) = E_n(f, \overline{\Omega})$ — найкраще рівномірне наближення функції $f \in A(\overline{\Omega})$ алгебраїчними многочленами

$$E_n(f, \overline{\Omega}) = \inf_{p_n \in P_n} \|f(z) - p_n(z)\| = \inf_{p_n \in P_n} \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z) - p_n(z)|;$$

$$S_n(z) = S_n(f, \overline{\Omega}, z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu F_\nu(z)$$

— частинна сума ряду Фабера (2) функції $f \in A(\overline{\Omega})$;

$$V_m^n(f, z) = V_m^n(f, \bar{\Omega}, z) = \frac{1}{n - m + 1} \sum_{\nu=m}^{n} S_\nu(f, z)$$

— сума Валле Пуссена ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$;

$$Z_n^k(f, z) = Z_n^k(f, \Omega, z) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) a_\nu F_\nu(z)$$

— нормальні середні Зігмунда ряду Фабера функції $f \in A(\overline{\Omega})$.

Оператор T_Ω задано на множині функцій $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$ [2, 3, с. 154], і діє він за правилом

$$T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(w) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw,$$

де $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, $z \in \Omega$.

Такий оператор називають оператором Фабера.

Оператор

$$T_{\Omega}^{-1}(f)(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\Psi(t))}{t-w}dt,\ |w|<1,$$

називають оберненим оператором Фабера.

Область Ω називають областю Фабера [2], якщо для норми оператора виконується співвідношення:

$$\|T_{\Omega}\| = \sup_{f\in\overline{\mathbb{D}},\ \|f\|_{A(\overline{\mathbb{D}})}\le 1} \|T_{\Omega}(f)(z)\| < \infty.$$

В [2] отримано критерій області Фабера, зокрема, встановлено таке твердження:

Для того, щоб область Ω була областю Фабера, необхідно і достатньо, щоб існувала сім'я $\{\mu_z\}_{z\in\Omega}$, $\mu_z : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, функцій обмеженої варіації (дійсна та уявна частини є функціями обмеженої варіації) така, що

$$\sup_{z\in\Omega}\int_{\mathbb{T}} |d\mu_z(\zeta)| < \infty, \tag{3}$$

і для будь-якого $z\in\Omega$

$$\frac{\Psi'(\cdot)}{\Psi(\cdot)-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_z(\zeta)}{\zeta-\cdot}. \tag{4}$$

З (4) легко отримати наступне представлення для многочленів Фабера

$$F_{\nu}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \zeta^{\nu} d\mu_z(\zeta),\ \nu = 0,1,2\ldots. \tag{5}$$

В роботах [4, 5] М.П.Тімана отримано порядок відхилення нормальних середніх Зігмунда ряду Фур'є 2π-періодичних неперервних функцій. В даній роботі для області Фабера Ω отримано оцінку для відхилень нормальних середніх Зігмунда ряду Фабера функції $f\in A(\overline{\Omega})$, яка залежить від поведінки послідовності найкращих наближень $E_n(f)$.

Для областей Фабера має місце лема.

Лема. *Нехай Ω — однозв'язна область Фабера, функція $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді*

$$\|f(z) - V_m^n(f,z)\| \leq C\frac{n+1}{n-m+1}E_m(f,\overline{\Omega}), \tag{6}$$

де $0 \leq m \leq n,\ n = 1,2,\ldots$ та стала C не залежить від f та n.

Тут та далі через C будемо позначати абсолютні сталі, можливо, неоднакові в різних формулах.

Доведення. Нехай $p_n(z)$ — поліном найкращого рівномірного наближення степеня n для функції $f \in A(\overline{\Omega})$. Тоді

$$\|f(z) - V_m^n(f,z)\| = \frac{1}{n-m+1}\Big\|\sum_{k=m}^{n}\Big(f(z) - \sum_{\nu=0}^{k}a_\nu F_\nu(z)\Big)\Big\| =$$

$$= \frac{1}{n-m+1}\Big\|\sum_{k=m}^{n}[f(z) - p_m(z) - S_k(f-p_m,\overline{\Omega},z)]\Big\| \leq$$

$$\leq E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{n-m+1}\Big\|\sum_{k=m}^{n}\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu(f-p_m)\cdot F_\nu(z)\Big\| =$$

$$= E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)}\times$$

$$\times\Big\|\int_{|t|=1}\int_{\mathbb{T}}\sum_{k=m}^{n}\sum_{\nu=0}^{k}[f(\Psi(t)) - p_m(\Psi(t))]\frac{\zeta^\nu}{t^{\nu+1}}dt d\mu_z(\zeta)\Big\| =$$

$$= E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{1}{4\pi^2(n-m+1)}\times$$

$$\times\Big\|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=m}^{n}\sum_{\nu=0}^{k}[f(\Psi(e^{i\varphi})) - p_m(\Psi(e^{i\varphi}))]e^{i\nu(\tau-\varphi)}d\varphi d\mu_z(e^{i\tau})\Big\| \leq$$

$$\leq E_m(f,\overline{\Omega}) + \frac{E_m(f,\overline{\Omega})}{4\pi^2(n-m+1)}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=m}^{n}\sum_{\nu=0}^{k}e^{i\nu\varphi}\Big|d\varphi\int_0^{2\pi}|d\mu_z(e^{i\tau})|.$$

Відомо [6], що

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{\nu=0}^{k} e^{i\nu\varphi} \Big| d\varphi \leq C(n+1), \ |\alpha_k| \leq 1,$$

тоді, врахувавши (3), остаточно матимемо

$$\|f(z) - V_m^n(f,z)\| \leq C \frac{n+1}{n-m+1} E_m(f, \overline{\Omega}).$$

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай* Ω *— обмежена однозв'язна область Фабера, функція* $f \in A(\overline{\Omega})$. *Тоді*

$$\|f(z) - Z_n^k(f,z)\| \leq \frac{C_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \overline{\Omega}),$$

де стала C_k *залежить від* k *і не залежить від* f *та* n.

Доведення. На основі умов теореми маємо розклад $f \in A(\overline{\Omega})$ в ряд Фабера

$$f(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu F_\nu(z).$$

Легко бачити, що

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k a_\nu F_\nu(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k (f(z) - S_{\nu-1}(z) - f(z) + S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu+1)^k (f(z) - S_\nu(z)) - \sum_{\nu=0}^{n} \nu^k (f(z) - S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \Big((\nu+1)^k - \nu^k \Big) (f(z) - S_\nu(z)) - n^k (f(z) - S_n(z)).$$

Тому

$$\|f(z) - Z_n^k(f,z)\| = \|f(z) - \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1} \right)^k \right) a_\nu F_\nu(z)\| \leq$$

$$\leq \left\| f(z) - S_n(z) + \frac{1}{(n+1)^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k a_\nu F_\nu(z) \right\| \leq$$

$$\leq \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) \|f(z) - S_n(z)\| +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^k} \left\| \sum_{\nu=0}^{n-1} ((\nu+1)^k - \nu^k)(f(z) - S_\nu(z)) \right\|. \qquad (7)$$

З монотонності послідовності найкращих рівномірних наближень випливає така нерівність:

$$E_n(f, \overline{\Omega}) \leq \frac{C_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \overline{\Omega}),$$

де C_k — стала, що залежить лише від k.

Тоді з урахуванням цієї нерівності, того, що $V_n^n(f, z) = S_n(z)$, та (6)для першого доданку правої частини співвідношення (7) матимемо

$$\left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) \|f(z) - S_n(z)\| \leq$$

$$\leq C \left(1 - \left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right) (n+1) E_n(f, \overline{\Omega}) \leq C E_n(f, \overline{\Omega}) \leq$$

$$\leq \frac{C_k}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu(f, \overline{\Omega}). \qquad (8)$$

Для зручності покладемо $A_\nu = (\nu+1)^k - \nu^k$, виберемо $m \in N$ таке, що $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Представимо другий доданок правої частини співвідношення (7) у вигляді

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu (f(z) - S_\nu(z)) = f(z) - S_0(z) +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu (f(z) - S_\nu(z)) + \sum_{\nu=2^m}^{n-1} A_\nu (f(z) - S_\nu(z)). \qquad (9)$$

Оскільки

$$S_m(z) = (n-m+1)V_m^n(f,z) - (n-m)V_{m+1}^n(f,z),$$

то після перетворення Абеля матимемо

$$\sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu (f(z) - S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu \Big((2^{\mu+1}-\nu)(f(z) - V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)) -$$

$$- \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu (2^{\mu+1}-\nu-1)\Big(f(z) - V_{\nu+1}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} A_\nu (2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z) - V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big) -$$

$$- \sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1} A_{\nu-1} (2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z) - V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big) =$$

$$= 2^\mu A_{2^\mu}\Big(f(z) - V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big) +$$

$$+ \sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1} (A_\nu - A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z) - V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big). \tag{10}$$

Аналогічні перетворення виконаємо в сумі

$$\sum_{\nu=2^m}^{n-1} A_\nu (f(z) - S_\nu(z)) =$$

$$= \sum_{\nu=2^m}^{n-1} A_\nu \Big((n-\nu+1)(f(z) - V_\nu^n(f,z)) - (n-\nu)(f(z) - V_{\nu+1}^n(f,z))\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=2^m}^{n-1} A_\nu (n-\nu+1)(f(z) - V_\nu^n(f,z)) -$$

$$-\sum_{\nu=2^m+1}^{n} A_{\nu-1}(n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z)) =$$

$$= A_{2^m}(n-2^m+1)(f(z)-V_{2^m}^n(f,z)) - A_{n-1}(f(z)-V_n^n(f,z))+$$

$$+\sum_{\nu=2^m+1}^{n-1}(A_\nu - A_{\nu-1})(n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z)). \qquad (11)$$

З урахуванням (10) та (11) рівність (9) запишеться так:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(f(z)-S_\nu(z)) = f(z)-S_0(z)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m-1} 2^\mu A_{2^\mu}\Big(f(z)-V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\Big(f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\Big)$$

$$+A_{2^m}(n-2^m+1)(f(z)-V_{2^m}^n(f,z)) - A_{n-1}(f(z)-V_n^n(f,z))+$$

$$+\sum_{\nu=2^m+1}^{n-1}(A_\nu - A_{\nu-1})(n-\nu+1)(f(z)-V_\nu^n(f,z)).$$

З останнього співідношення отримаємо наступну нерівність

$$\frac{1}{(n+1)^k}\left\|\sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu(f(z)-S_\nu(z))\right\| \le \frac{1}{(n+1)^k}\|f(z)-S_0(z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1} 2^\mu A_{2^\mu}\|f(z)-V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\|f(z)-V_\nu^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}A_{2^m}(n-2^m+1)\|f(z)-V_{2^m}^n(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}A_{n-1}\|f(z)-V_n^n(f,z)\|+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\nu=2^m+1}^{n-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(n-\nu+1)\|f(z)-V_\nu^n(f,z)\|=$$

$$=d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6. \tag{12}$$

Оцінимо кожен з доданків суми (12), врахувавши монотонність послідовності найкращих рівномірних наближень $E_\nu(f,\overline{\Omega})$ та лему:

$$d_1=\frac{1}{(n+1)^k}\|f(z)-S_0(z)\|=\frac{1}{(n+1)^k}\|f(z)-V_0^0(f,z)\|\leq$$

$$\leq\frac{C}{(n+1)^k}E_0(f,\overline{\Omega})\leq\frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_2=\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}2^\mu\left((2^\mu+1)^k-2^{\mu k}\right)\|f(z)-V_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}(f,z)\|\leq$$

$$\leq\frac{C}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}2^{(\mu+1)k+1}E_{2^\mu}(f,\overline{\Omega})\leq\frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_3\leq\frac{C}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=2^\mu+1}^{2^{\mu+1}-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(2^{\mu+1}-\nu)\frac{2^{\mu+1}}{2^{\mu+1}-\nu}E_\nu(f,\overline{\Omega})\leq$$

$$\leq\frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m-1}2^{\mu k}E_{2^\mu}(f,\overline{\Omega})\leq\frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_4\leq\frac{C}{(n+1)^k}((2^m+1)^k-2^{mk})(n-2^m+1)\frac{n+1}{n-2^m+1}E_{2^m}(f,\overline{\Omega})\leq$$

$$\leq\frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{2^m}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega})\leq\frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

$$d_5 \le \frac{C}{(n+1)^k}(n^k-(n-1)^k)(n+1)E_n(f,\overline{\Omega}) \le C\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{k-1}E_n(f,\overline{\Omega}) \le$$

$$\le \frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega});$$

при оцінці d_6 слід врахувати, що $n<2\nu$, $\nu>2^m$,

$$d_6 \le \frac{C}{(n+1)^k}\sum_{\nu=2^m+1}^{n-1}(A_\nu-A_{\nu-1})(n-\nu+1)\frac{n+1}{n-\nu+1}E_\nu(f,\overline{\Omega}) \le$$

$$\le \frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega}).$$

З оцінок для d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 та d_6 випливає оцінка і для

$$\frac{1}{(n+1)^k}\left\|\sum_{\nu=0}^{n-1}((\nu+1)^k-\nu^k)(f(z)-S_\nu(z))\right\| \le$$

$$\le \frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\overline{\Omega}). \tag{13}$$

З (7) та (13) отримуємо, що

$$\|f(z)-Z_n^k(f,z)\| \le \frac{C_k}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}E_\nu(f,\bar{\Omega})$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай Ω — однозв'язна область Фабера, а функція $f\in A(\overline{\Omega})$. Тоді

$$\|f(z)-\sigma_n(f,z)\| \le \frac{C}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}E_\nu(f,\overline{\Omega}),$$

де $\sigma_n(f,z)=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}S_n(z)$ і стала C не залежить від f та n.

Для областей Радона дану оцінку отримано в роботі [1].

Нехай $\varepsilon = \{\varepsilon_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ — строго монотонно спадна до 0 числова послідовність. Позначимо через $A_\epsilon(\overline{\Omega})$ множину функцій $f \in A(\overline{\Omega})$ таких, що

$$E_n(f, \overline{\Omega}) \leq \varepsilon_{n+1},$$

а через $Z_n^k(A_\varepsilon(\overline{\Omega}))$ — верхню грань

$$Z_n^k(A_\varepsilon(\overline{\Omega})) = \sup_{f \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})} \left\| f(z) - Z_n^k(f, z) \right\|.$$

Теорема 2. *Якщо для області Ω оператор Фабера T_Ω і обернений оператор Фабера T_Ω^{-1} є обмеженими, то для множини $f \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})$ існують сталі C_1 та C_2 такі, що*

$$\frac{C_1}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} \varepsilon_{\nu+1} \leq Z_n^k(A_\varepsilon(\overline{\Omega})) \leq \frac{C_2}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} \varepsilon_{\nu+1}. \tag{14}$$

Доведення. Права частина нерівності (14) випливає з теореми 1.

Доведемо ліву частину цієї нерівності. Для цього побудуємо функцію $f^* \in A_\varepsilon(\overline{\Omega})$ таку, що

$$\left\| f^*(z) - Z_n^k(f, z) \right\| \geq \frac{C_1}{(n+1)^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} \varepsilon_{\nu+1}.$$

Покладемо

$$f_1(w) = \frac{\pi}{K} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) w^\nu, \ |w| \leq 1, \tag{15}$$

де

$$K = \frac{1}{2} \sup_{z \in \Omega} \int_{\mathbb{T}} |d\mu_z(\zeta)| < \infty,$$

$\{\mu_z\}_{z \in \Omega}$, $\mu_z : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$— функція обмеженої варіації.

За допомогою оператора Фабера одержимо таку функцію:

$$f^*(z) = T_\Omega(f_1)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_1(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, z \in G.$$

Внаслідок збіжності ряду (15) маємо розклад в ряд Фабера функції $f^*(z)$, рівномірнозбіжний в замкненій області $\overline{\Omega}$

$$f^*(z) = \frac{\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1})F_\nu(z).$$

За допомогою оберненого оператора Фабера знайдемо

$$f_1(w) = T_\Omega^{-1}(f^*)(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f^*(\Psi(t))}{t-w}dt, |w| \le 1. \qquad (16)$$

Відомо, що оператор (16) існує за умови [3, с. 154]

$$\int_{|t|=1}|f^*(\Psi(t))|\,|dt| = \int_{\Gamma}|f^*(\zeta)|\,|\Phi(\zeta)||d\zeta| < \infty.$$

З (15) при $|w| \le 1$ отримуємо

$$|f_1(w)| \le \frac{\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1}) \le \frac{\pi\varepsilon_0}{K}.$$

З (3), (5) та останньої рівності випливає

$$\|f^*(z)\| = \|T_\Omega(f_1)(z)\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\mathbb{T}} f_1(\zeta)d\mu_z(\zeta)\right\| \le C\|T_\Omega\|\varepsilon_0,$$

тобто умова існування оператора (16) виконується. Тоді

$$\left\|f_1(w) - Z_n^k(f_1,w)\right\| = \|T_\Omega^{-1}(f_1 - Z_n^k(f_1))(w)\| \le$$

$$\le \|T_\Omega^{-1}\|\cdot\|f^*(z) - Z_n^k(f^*,z)\|.$$

Отже,

$$\left\|f^*(z) - Z_n^k(f^*,z)\right\| \ge C\left\|f_1(w) - Z_n^k(f_1,w)\right\|$$

Врахувавши, що $\|f_1(z)\| \ge |f_1(z_0)|$, та поклавши $z_0 = 1$, матимемо

$$\left\|f^*(\Psi(w)) - Z_n^k(f^*,\Psi(w))\right\| \ge$$

$$\geq \frac{C\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})-\frac{C\pi}{K}\sum_{\nu=0}^{n}\left(1-\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k\right)(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})=$$

$$=\frac{C\pi}{K}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})+\frac{C\pi}{K}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu}{n+1}\right)^k(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})=$$

$$=\frac{C\pi}{K}\varepsilon_{n+1}+\frac{C\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})=$$

$$=\frac{C\pi}{K}\varepsilon_{n+1}+\frac{C\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k\varepsilon_\nu-\frac{C\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k\varepsilon_{\nu+1}=$$

$$=\frac{C\pi}{K}\varepsilon_{n+1}+\frac{C\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k\varepsilon_\nu-\frac{C\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n+1}(\nu-1)^k\varepsilon_\nu\geq$$

$$\geq\frac{C\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\nu^k-(\nu-1)^k\right)\varepsilon_\nu\geq$$

$$\geq\frac{Ck\pi}{K(n+1)^k}\sum_{\nu=1}^{n}(\nu-1)^{k-1}\varepsilon_\nu.$$

Звідси випливає, що існує така стала C_1, що

$$\left\|f^*(\Psi(w))-Z_n^k(f^*,\Psi(w))\right\|\geq\frac{C_1}{(n+1)^k}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{k-1}\varepsilon_{\nu+1}.$$

Покажемо тепер, що $f(z)\in A_\varepsilon(\overline{\Omega})$. Дійсно,

$$E_n(f^*,\overline{\Omega})\leq\frac{\pi}{2K}\left\|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})F_\nu(z)\right\|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2K}\left\|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})\int_{\mathbb{T}}\zeta^\nu d\mu_z(\zeta)\right\|\leq\varepsilon_{n+1}.$$

Теорему доведено.

1. *Abdullayev F., Zaderey N., Zaderey P.* On the approximation of analytic functions by Fejer sums of Faber polynomials // Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"– Sofia, 2011. – P. 13–18.
2. *Савчук В. В.* Області Фабера і задача О. І. Степанця //Теорія наближення та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 35. — С. 151-163.
3. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, 1984.
4. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — К.: Наукова думка, 2009.
5. *Тиман М. Ф.* Наилучшее приближение и линейные методы суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР, сер. Математика. — 1965. — 29. — С. 587-604.
6. *Фомин Г. А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Матем. сб. — 1964. — 65(107). — С. 144–152.