УДК 517.5

Гаєвський М.В., Задерей П.В. (Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка,
Київський національний університет технологій та дизайну)

ПРО НЕРІВНІСТЬ ЛЕБЕГА НА КЛАСАХ $\bar{\psi}$ - ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

In this paper estimates deviations of Fourier sums on the spaces $C^{\bar{\psi}}$ expressed in terms of the best approximation of $\bar{\psi}$-derivatives of functions in the understanding A. I. Stepanets are found. The sequence $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ the conditions of Boas-Telyakovskij are satisfy.

В роботі знайдено оцінки відхилень сум Фур'є на просторах $C^{\bar{\psi}}$, виражені через найкращі наближення $\bar{\psi}$-похідних функцій в розумінні О. І. Степанця. Послідовності $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ задовольняють умовам Боаса-Теляковського.

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних за Лебегом функцій f з нормою $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$, а C — підпростір L, що складається з неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f|$.

Нехай

$$S[f] := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \qquad (1)$$

— ряд Фур'є за тригонометричною системою функції $f \in L$; $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k = 1, 2, \dots$ — її коефіцієнти Фур'є. Позначимо через $S_n(f; x)$ — частинну суму ряду Фур'є (1) порядку n і покладемо $\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x)$. Нехай далі T_n — множина тригонометричних поліномів t_n вигляду $t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big)$ і

$$E_n(f)_X := \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_X \qquad (2)$$

— найкраще наближення функції f за допомогою тригонометричних поліномів $t_n \in T_n$, а X означає або L, або C.

А. Лебег показав [1], що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \leq (L_n + 1)E_n(f)_C, \qquad (3)$$

де L_n — норма оператора $S_n : f \to S_n(f;\cdot)$, що діє з простору C в C (її ще називають константою Лебега сум Фур'є).

Як відомо (див. наприклад [4, с. 30]) для будь-якого $n \in \mathbb{N}$: $L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + r_n$, де $|r_n| < 1,8$. Тому співвідношення (3) можна записати у вигляді

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \leq (\frac{4}{\pi^2}\ln n + R_n)E_n(f)_C, |R_n| < 2,8. \qquad (4)$$

Зауважимо що, нерівність (4) на всьому просторі C є асимптотично точною, але вона може бути уточнена в певному розумінні для функцій f, що належать до деяких підмножин в C.

К.І. Осколков довів [3], що для довільної $f \in C$

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \leq K \sum_{k=0}^{n} \frac{E_{n+k}(f)_C}{k+1}, \qquad (5)$$

де $K > 0$ — деяка стала і показав, що якщо $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$ — монотонно спадна до нуля послідовність невід'ємних чисел (надалі будемо писати $\varepsilon \in P_0$) і $C_\varepsilon = \{f \in C : E_k(f)_C \leq \varepsilon_k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$, то існують додатні сталі K_1 і K_2, що

$$K_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1} \leq \sup_{f \in C_\varepsilon} \|\rho_n(f;x)\|_C \leq K_2 \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_{n+k}}{k+1}. \qquad (6)$$

О.І. Степанець ([6], [7], також див. [4, с. 132]) ввів поняття $\bar{\psi}$-похідних і визначив класи $C^{\bar{\psi}}C$ наступним чином.

Нехай $f \in L$ і (1) — її ряд Фур'є, $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, причому для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \widetilde{A}_k(f;x) \right),$$

де $A_k(f;x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$, $\widetilde{A}_k(f;x) = a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назвемо $\bar{\psi}$-похідною функції f і позначимо її через $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Через $C^{\bar{\psi}}$ будемо позначати множину всіх неперервних функцій f, у яких існують $\bar{\psi}$-похідні і покладемо

$$C^{\bar{\psi}}C = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C\},$$

$$C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C_\varepsilon\},$$

$$C^0 = \{f \in C : \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0\}.$$

Далі через $\mathfrak{M}$ позначимо множину опуклих донизу при $v \geq 1$ функцій $\psi(v)$, для яких $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$; $\mathfrak{M}_0$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $0 < \mu(\psi,t) \leq K < \infty$, де $\mu(\psi,t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$ та $\eta(t) = \eta(\psi,t) = \psi^{-1}(\frac{1}{2}\psi(t))$; $\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\int_1^\infty \frac{|\psi(t)|}{t}dt < \infty$.

Отже, О.І. Степанець встановив такий аналог нерівності Лебега (4) ([8], також див. [4], стор. 216): якщо $\pm\psi_1 \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_2 \in \mathfrak{M}'_0$, то для довільної $f \in C^{\bar{\psi}}C$ та довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\|\rho_{n-1}(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n + \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\bar{\psi}(n)\right)E_{n-1}(f^{\bar{\psi}})_C, \qquad (7)$$

де O(1) — величина рівномірно обмежена по n та по f, запис $\pm\psi \in A$ означає, що або $\psi \in A$, або $-\psi \in A$, де $A \in \mathfrak{M}$.

Там же в [4, с. 218, 242-244] показано, що $\forall\varepsilon \in P_0$ існує функція $f_* \in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ така, що

$$\|\rho_{n-1}(f_*;x)\|_C = \left(\frac{4}{\pi^2}\bar{\psi}(n)\ln n + \frac{2}{\pi}\int_n^\infty \frac{|\psi_2(t)|}{t}dt + O(1)\bar{\psi}(n)\right)\varepsilon_{n-1}.$$

Метою даної роботи є встановлення нерівності Лебега типу (7) для послідовностей $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$, що задовольняють умови Боаса-Теляковського. Кажуть, що послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови

Боаса-Теляковського, якщо

$$\lim_{k\to\infty}\psi(k)=0, \tag{8}$$

$$V(\psi):=\sum_{k=0}^{\infty}|\triangle\psi(k)|<\infty,\ \text{де}\ \triangle\psi(k)=\psi(k)-\psi(k+1), \tag{9}$$

$$B_0(\psi):=\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\psi(k-l)-\triangle\psi(k+l)}{l}\right|<\infty. \tag{10}$$

О.М. Швецова отримала наступний результат [12, теорема 1.1]:

Нехай $n\in\mathbb{N}$, $\psi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ є локально абсолютно неперервною функцією на $(-\infty,-n-1]\cup[n+1,\infty)$, для всіх $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $\psi(k)\neq0$ та $\lim\psi(k)=0$ при $|k|\longrightarrow\infty$, а також $\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi)=\int_{n+1}^{\infty}vraisup_{|u|\le t}|\psi'(t)|du<\infty$. Припускається ще, що $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\psi(k)-\psi(-k)|}{k}<\infty$ (це і необхідно). Тоді (вважаємо, що $\frac{0}{0}=0$)

$$\sup_{f:f^{\psi}\in C}\frac{\|f-S_n(f;x)\|_{\infty}}{E_n(f^{\psi})_{\infty}}=\max_{f\in W_{\infty}^{\psi}}\frac{\|f-S_n(f;x)\|_{\infty}}{E_n(f^{\psi})_{\infty}}=$$

$$=\max_{f\in W_{\infty}^{\psi}}\|f-S_n(f;x)\|_{\infty}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{|\psi(k+n)\psi(-k-n)|^{1/2}E(h_{k+n})}{kh_{k+n}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{|\psi(k+n)-\psi(-k-n)|}{k}+O\Big(\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi)\Big),$$

де W_{∞}^{ψ} — клас неперервних періодичних функцій f, для яких тригонометричний ряд $\sum_{k\neq0}\frac{1}{\psi(k)}c_k(f)e^{ikx}$ є рядом Фур'є деякої обмеженої функції f^{ψ} (ψ-похідна) та $\|f^{\psi}\|_{\infty}\le1$,

$$h_k=\left(\left(Re\frac{\psi(k)+\psi(-k)}{2(\psi(k)\psi(-k))^{1/2}}\right)^2+\left(Im\frac{\psi(k)-\psi(-k)}{2(\psi(k)\psi(-k))^{1/2}}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$E(h)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-h^2\sin^2(t)}dt, h\in[0,1]$$

— *повний еліптичний інтеграл другого роду.*

Як зазначено в [12, с. 46] для кусково лінійних функцій ψ з вузлами в цілочислових точках умова $\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi) < \infty$ має вигляд $\sum_{k=n+1}^{\infty} \sup\limits_{k\le m} |\psi(m+1) - \psi(m)| < \infty$. Таку умову на ψ називають умовою Сідона-Теляковського і як відомо [11, с. 217] вона є менш загальною ніж умови Боаса-Теляковського, при виконанні яких (для послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, що визначають множину функцій $C^{\bar{\psi}}$) встановлено наступне твердження.

Для довільних числових послідовностей $a = a(k)$ і $b = b(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ та $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$Q_n(a,b) := \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a^2(n+k) + b^2(n+k)}}{k} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2n+3}^{\infty} \frac{|b(k)|}{k},$$

$$R_n(a,b) := V_{n+1}(a) + V_{n+1}(b) + B_{n+1}(a) + B_{n+1}(b),$$

де для числової послідовності $\gamma = \gamma(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$V_m(\gamma) = \sum_{k=m}^{\infty} |\triangle\gamma(k)|,$$

$$B_m(\gamma) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\gamma(k+m-l) - \triangle\gamma(k+m+l)}{l} \right|.$$

Теорема. *Нехай послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ задовольняють умови (8), (9) та (10), і додатково — $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$. Тоді для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}}C$ при $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \le \Big(Q_n(\psi_1,\psi_2) + O(1)R_n(\psi_1,\psi_2)\Big)E_n(f^{\bar{\psi}})_C, \qquad (11)$$

Окрім того, нерівність (11) є точною на класі $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$ в тому розумінні, що $\forall \varepsilon \in P_0$ існує $f_* \in C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$

$$\|\rho_n(f_*;x)\|_C = \Big(Q_n(\psi_1,\psi_2) + O(1)R_n(\psi_1,\psi_2)\Big)\varepsilon_n. \qquad (12)$$

Доведення. Як відомо [10], умови теореми на послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ забезпечують те, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx)$$

є рядом Фур'є деякої функції з простору L і для $\rho_n(f;x)$, $f\in C^{\bar\psi}C$ має місце інтегральне представлення (див. [4, с. 178])

$$\rho_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{\bar\psi}(u)F_n(\bar\psi;x-u)du, x\in[-\pi,\pi],$$

де $F_n(\bar\psi;x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx)$.

Нехай $t_n^*\in T_n$ — поліном найкращого наближення функції $f^{\bar\psi}$. Тоді, очевидно,

$$\rho_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{\bar\psi}(u)-t_n^*(u))F_n(\bar\psi;x-u)du$$

і

$$\|\rho_n(f;x)\|_C\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f^{\bar\psi}(u)-t_n^*(u)\|_C|F_n(\bar\psi;x-u)|du=$$

$$=\frac{1}{\pi}E_n(f^{\bar\psi})_C\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(\bar\psi;u)|du. \qquad (13)$$

Аналогічно як і в [4, с.312], використовуючи формулу С.О. Теляковського [10, теорема 1] (див. також [4, с.56]) покладаючи в ній $a_k=b_k=0$ при $k\leq n$; $a_k=\psi_1(k)$, $b_k=\psi_2(k)$ при $k>n$ та $m=n+1$ отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(\bar\psi;u)|du=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{\psi_1^2(n+k)+\psi_2^2(n+k)}}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k}+$$

$$+O(1)\Big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\Big). \qquad (14)$$

Об'єднуючи (13) та (14) отримуємо (11).

Для доведення другої частини теореми достатньо для заданого $\varepsilon \in P_0$ вказати функції $\widetilde{\varphi} \in C^0_\varepsilon$, $f_* \in C^{\bar\psi}C_\varepsilon$, такі, що $(f_*)^{\bar\psi} = \widetilde{\varphi}$, $E_n(\widetilde{\varphi})_C = \varepsilon_n$ і

$$\|\rho_n(f_*;x)\|_C \geq \biggl(Q_n(\psi_1,\psi_2) + O(1)R_n(\psi_1,\psi_2)\biggr)\varepsilon_n.$$

З цією метою розглянемо функцію

$$g_n(-x) = signF_n(\bar\psi;x), |x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Позначимо через $\widetilde{g}_n(-x), |x| \leq \frac{\pi}{2}$ неперервну функцію, що співпадає з $g_n(-x)$ при $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, за винятком неперетинних δ-околів точки 0 та точок розриву x_k, де вона лінійна та її графік сполучає точки $(-\delta, g_n(-\delta))$ і $(\delta, g_n(\delta))$, а також $(x_k - \delta, g_n(x_k - \delta))$ та $(x_k + \delta, g_n(x_k + \delta))$.

Продовжимо функцію $\widetilde{g}_n(-x)$ неперервно на $[-\pi,\pi]$ так, щоб $\widetilde{g}_n(-\pi) = \widetilde{g}_n(\pi)$, $|\widetilde{g}_n(-x)| \leq 1$ і на $[-\pi,\pi]$ було не менше $2n$ точок c_i, в яких $|\widetilde{g}_n(-c_i)| = 1$, в цих точках функція $\widetilde{g}_n(-x)$ почергово змінює знак і щоб при цьому мала місце рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}_n(-x)dx = 0.$$

Тоді $\widetilde{\varphi} \in C^0$, і оскільки згідно з теоремою Чебишова [5, с. 68] поліном найкращого наближення порядку n функції $\widetilde{g}_n(-x)$ є тотожним нулем, то $E_n(\widetilde{\varphi})_C = \varepsilon_n$, тобто $\widetilde{\varphi} \in C^0_\varepsilon$. Нехай далі $\Phi_n(-x)$ — $\bar\psi$-інтеграл функції $\widetilde{\varphi}(n;-x)$, тобто $\bigl(\Phi_n(-x)\bigr)^{\bar\psi} = \widetilde{\varphi}(n;-x)$. Покладемо $f_* = \Phi_n$. Тоді, зрозуміло, що $f_* \in C^{\bar\psi}C_\varepsilon$ і

$$\|\rho_n(f^*;x)\|_C = \|\rho_n(\Phi_n;x)\|_C \geq$$

$$\geq |\rho_n(\Phi_n;0)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\varphi}(n;-u)F_n(\bar\psi;u)du\right| \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |F_n(\bar\psi;u)|du - \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{\pi/2\leq|u|\leq\pi} |F_n(\bar\psi;u)|du =$$

$$= \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du - \frac{2\varepsilon_n}{\pi}\int\limits_{\pi/2\le|u|\le\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du. \qquad (15)$$

Отже,

$$\|\rho(f_*;x)\|_C \ge \frac{\varepsilon_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du + O\left(\varepsilon_n\int_{\pi/2\le|u|\le\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du\right), \qquad (16)$$

Для оцінки $\int_{\pi/2\le u\le\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du$ використаємо один результат С.О. Теляковського [10, теорема 2], пов'язаний з оцінкою інтегралу $\int_c^\pi|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx)|dx$, де $c\in[0,\pi]$ в якому слід покласти $a_k=b_k=0$ при $k\le n$; $a_k=\psi_1(k), b_k=\psi_2(k)$ при $k>n$ та $m=n$.

Тоді

$$\int_{\pi/2\le u\le\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}{}^{*}\frac{\xi_k}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}{}^{*}\frac{|\psi_2(k)|}{k} +$$

$$+O(1)\Big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\Big),$$

де

$$\xi_k = \xi\big(\psi_2(k), \sqrt{(\psi_1(n-k)-\psi_1(n+k))^2+(\psi_2(n-k)-\psi_2(n+k))^2}\big),$$

функція $\xi(t,u)$ визначається рівностями

$$\xi(t,u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}|t|, & \text{при } |u|\le|t|,\\ |t|\arcsin\left|\frac{t}{u}\right| + \sqrt{u^2-t^2}, & \text{при } |t|<|u|. \end{cases}$$

а Σ^* означає, що в цій сумі взяті лише ті доданки, для яких $\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{k}$,

Тому

$$\int_{\pi/2}^{\pi}|F_n(\bar{\psi};u)|du = O(1)\Big(V_{n+1}(\psi_1)+V_{n+1}(\psi_2)+B_{n+1}(\psi_1)+B_{n+1}(\psi_2)\Big). \qquad (17)$$

Аналогічним способом отримуємо

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2}|F_n(\bar{\psi};u)|du =$$

$$= O(1)\Bigg(V_{n+1}(\psi_1) + V_{n+1}(\psi_2) + B_{n+1}(\psi_1) + B_{n+1}(\psi_2)\Bigg). \qquad (18)$$

Нарешті, із (16) з урахуванням (14), (17) і (18) отримуємо шукану оцінку знизу для $\|\rho_n(f_*; x)\|_C$.

Теорему доведено.

Зауваження. У випадку, коли ψ_1, ψ_2 є опуклими донизу функціями, як встановлено О.І. Степанцем (див., наприклад, [4, с.27]) рівність (12) є асимптотично точною, тобто залишковий член має порядок менший від порядку головного члена. Асимптотично точною формула (12) буде, зокрема, і у випадку монотонно спадних до 0 послідовностей, тобто коли $\psi_1(k) \geq \psi_1(k+1)$,$\psi_2(k) \geq \psi_2(k+1)$ за умов $\lim \psi_1(k) = 0$, $\lim \psi_2(k) = 0$, $k \longrightarrow \infty$. Дійсно, тоді

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\triangle\psi_1(k)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \triangle\psi_1(k) = \psi_1(n+1)$$

та має місце оцінка (доведення див. [2, с. 102])

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{\triangle\psi_1(k+n+1-l) - \triangle\gamma(k+n+1+l)}{l} \right| \leq M\psi_1(n+1).$$

І аналогічно буде для ψ_2. Прикладами таких послідовностей є, наприклад: $\psi(k) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\left|\sin k\frac{\pi}{2}\right|$, [2, с. 104]; чи $\triangle\psi(2^s) = \frac{1}{2^s}$ та $\triangle\psi(k) = 0, k \neq 2^s$, $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\psi(k) = \sum_{m=k}^{\infty} \triangle\psi(k)$ [11, с. 217].

1. *Lebesgue H.* Sur la représentation trigonometrique approcheé des founctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France — 1910. — **38** — p. 184-210

2. *Задерей П. В.* Об уклонении $(\psi, \bar{\beta})$-дифференцируемых периодических функций от линейных средних их рядов Фурье. — Варшава, 1990. С. 96-110 - (Preprint Institute of mathematics Polish Academy of Sciences, XXXIV semester in Banach center theory of real functions; 482)

3. *Осколков К. И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. — 1975. — **18** — №4. — С.515-526.

4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.

5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — **40**. — Ч. 2. — 467 с.

6. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье. — Киев, 1996. — 70с. — (Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 96.11).

7. *Степанец А. И.* О сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журнал. — 1997. — **49**, №8. — С. 1069–1113.

8. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журнал. — 1998. — **50**, №2. — С. 274-291.

9. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Укр. мат. журнал. — 1998. — **50**, №3. — С. 388-400.

10. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации. // Приближение периодических функций, Тр. МИАН СССР, **109**, 1971 — С. 65–97.

11. *Фомин Г. А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 1978. — **23** — №2. — С.213-222.

12. *Швецова А. М.* Аппроксимация функций с ограниченной производной общего вида полиномами и целыми функциями экспоненциального типа [Текст] : дис... канд. физ.-мат. наук. — Донецк, 2001. — 120 с.