

УДК 517.5

**П. В. Задерей** (Київський нац. ун-т технологій та дизайну)

**Р. В. Товкач** (Східноєвропейський нац. університет)

**Про збіжність в середньому рядів Тейлора і Лорана**

*Для аналітичних в області  $\Delta = D \cup D_\infty$  функцій знайдено умови, виражені через коефіцієнти Лорана, необхідні для збіжності в середньому її ряду Лорана. Для функцій, аналітичних у крузі  $D$ , отримано необхідні і достатні умови збіжності в середньому ряду Тейлора, виражені через коефіцієнти ряду Тейлора, а також обмеженості в метриці простору  $L_1$  частинних сум ряду Тейлора.*

Нехай  $L_1$  — простір  $2\pi$  - періодичних інтегровних за Лебегом функцій  $f(x)$  зі скінченною нормою

$$\|f\|_1 = \|f(x)\|_{L_1} = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty$$

і нехай тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

є рядом Фур'є функції  $f \in L_1$ , тобто

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt.$$

Через  $\tilde{f}(x)$  позначимо функцію, спряжену з  $f(x)$ . Її ряд Фур'є буде мати вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx). \tag{2}$$

Якщо функція  $f(x)$  — парна, то її рядом Фур'є буде ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{3}$$

а рядом Фур'є непарної функції буде

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \quad (4)$$

Послідовність  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  називатимемо нуль-послідовністю, якщо  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

С. А. Теляковський [8] для нуль-послідовностей  $\{a_k\}$ , які задовольняють умову

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \frac{\Delta a_{i-k} - \Delta a_{i+k}}{k} \right| < \infty, \quad (5)$$

$$\Delta a_k = a_k - a_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

встановив, що ряд (3) є рядом Фур'є своєї суми. Якщо ж нуль-послідовність  $\{b_k\}$  задовольняє умову (5), то ряд (4) буде рядом Фур'є тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty. \quad (6)$$

Умови (5) і (6) називають умовами Боаса–Теляковського інтегровності тригонометричних рядів. Множини нуль-послідовностей, які задовольняють умови (5) і (6), позначатимемо через  $B - T$ .

Покладемо  $a_{-n} = a_n$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_{-n} = b_n$  ( $n > 0$ ) і позначимо

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n). \quad (7)$$

Отже

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Тоді ряди (1) і (2) матимуть вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (8)$$

$$-i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign } k c_k e^{ikx}. \quad (9)$$

а

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

$$\tilde{S}_n(f; x) = -i \sum_{k=-n}^n \text{sign } k c_k e^{ikx}.$$

– частинні суми рядів (8) і (9).

Через  $C$  будемо надалі позначати абсолютні додатні сталі, можливо, не одні й ті самі, в різних формулах.

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в області  $\Delta := D \cup D_\infty$ , де область  $D = \{z : |z| < 1\}$ , а область  $D_\infty = \{z : |z| > 1\}$ ,  $f(\infty) = 0$ .

Тоді

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, & z \in D, \\ f_2(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}, & z \in D_\infty, \end{cases} \quad (10)$$

і ряди  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ,  $z \in D$ ,  $-\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$ ,  $z \in D_\infty$ , є рядами Тейлора функцій  $f_1$  і  $f_2$ .

Розглянемо клас  $CS$  аналітичних в області  $\Delta$  функцій із нормою

$$\|f\|_1^* = \lim_{r \rightarrow 1} \left\| f(re^{it}) - f\left(\frac{1}{r}e^{it}\right) \right\|_1 < \infty. \quad (11)$$

За теоремою Г. Ц. Тумаркіна [9] такий клас  $CS$  збігається з класом функцій, які аналітичні в області  $\Delta$  і зображаються інтегралом типу Коші-Стільтьєса

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\psi(\theta)}{e^{i\theta} - z}. \quad (12)$$

Згідно з теоремою В. І. Смірнова [5, с.94] на колі  $|z| = 1$  існують граничні значення функцій  $f_1$  і  $f_2$ . Такі функції належать до класу  $H_p$ ,  $0 < p < 1$ . Отже вони мають граничні значення по недотичних шляхах.

За теоремою братів Ріссів [5, с. 96] умова

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\sigma(\theta) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

означає, що міра  $\sigma$  є абсолютно неперервною відносно міри Лебега, тобто існує така сумовна функція  $g(e^{in\theta}) : g(e^{in\theta})d\theta = d\sigma(\theta)$ . Отже, за теоремою Г. М. Фіхтенгольца [5, с.97]) інтеграл типу Коші-Стільтьєса (12) перероджується в інтеграл Коші і зображає функцію з класу  $H_1$ .

Під збіжністю в середньому будемо розуміти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(e^{it}) - S_n(f; e^{it})\|_1^* = 0. \quad (13)$$

Відомо (див.[12],[11]), що для  $\forall f \in H_1(D)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_1 = 0.$$

Ф.Рісс (див.[1, с. 599]) побудував приклад такої функції  $f^*(z)$ , аналітичної в області  $D = \{z : |z| < 1\}$ , що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f^* - S_n(f^*)\|_1 = B < \infty.$$

Таким чином частинна сума  $S_n(f^*; z)$  її ряду Тейлора не збігається в середньому до функції  $f^*(z)$ . Є ряд робіт (див.[10], [6], [7]), де достатні умови збіжності в середньому рядів Тейлора дано в інших термінах.

Ця робота присвячена розв'язанню такої задачі: що можна сказати про поведінку коефіцієнтів  $c_k, c_{-k}$ , якщо відомо, що виконується рівність (13). Інакше кажучи, потрібно знайти необхідні умови на послідовність  $c_k$  коефіцієнтів для збіжності за нормою рядів Тейлора компонент  $f_1, f_2$  функції  $f$ .

Основним результатом є наступна теорема.

**Теорема 1.** *Нехай функція  $f \in CS$  і має місце (10). Тоді для того, щоб виконувалося співвідношення (13), необхідно, щоб*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} = 0. \quad (14)$$

Доведення. Зафіксуємо  $r \in (0, 1)$ . Маємо:

$$F_r(e^{it}) := f(re^{it}) - f\left(\frac{e^{it}}{r}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ikt}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (15)$$

Розглянемо суму Валле Пуссена ряду в правій частині (15)

$$v_{2n}^n(F_r; e^{it}) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} S_k(F_r; e^{it}) = c_0 + \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k^{(n)} r^k (c_k e^{it} + c_{-k} e^{-ikt}),$$

де

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{2n - k + 1}{n}, & k = n + 1, n + 2, \dots, 2n. \end{cases}$$

Для будь-якої сумовної  $2\pi$ -періодичної функції суми Валле Пуссена  $v_{2n}^n$  її ряду Фур'є збігаються в середньому. Дійсно, якщо  $\tau_n^*(e^{it})$  – тригонометричний поліном порядку  $n$ , що найкраще наближає функцію  $F_r(e^{it})$  в метриці  $L_1$ , то

$$\begin{aligned} \|F_r - v_{2n}^n(F_r)\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_r(e^{it}) - v_{2n}^n(F_r; e^{it})| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_r(e^{it}) - \tau_n^*(e^{it})| dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v_{2n}^n(F_r - \tau_n^*; e^{it})| dt \leq \\ &\leq C \int_0^{2\pi} |(F_r(e^{it}) - \tau_n^*(e^{it}))| dt (1 + \|v_{2n}^n\|_{L \rightarrow L}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

бо, як відомо,  $\|v_{2n}^n\|_{L \rightarrow L} \leq C$ .

Оскільки

$$v_{2n}^n(F_r; e^{it}) - S_n(F_r; e^{it}) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n - k + 1}{n} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}),$$

то при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|F_r - S_n(F_r)\|_1 &= \|(v_{2n}^n(F_r) - S_n(F_r)) - (F_r - v_{2n}^n(F_r))\|_1 = \\ &= \|v_{2n}^n(F_r) - S_n(F_r)\|_1 + o(1) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right| dt + o(1). \end{aligned} \quad (16)$$

Оцінимо останній інтеграл знизу.

Різниця між сумою Валле Пуссена й частинною сумою спряженого ряду функції

$$\tilde{F}_r(e^{it}) = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign } kr^{|k|} c_k e^{ikx}$$

матиме вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{2n}^n(F_r; e^{it}) - \tilde{S}_n(F_r; e^{it}) &= v_{2n}^n(\tilde{F}_r; e^{it}) - S_n(\tilde{F}_r; e^{it}) = \\ &= -i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (c_k e^{ikt} - c_{-k} e^{-ikt}). \end{aligned}$$

Позначимо через  $T_{2n}(e^{it})$  тригонометричний поліном порядку  $2n$  виду

$$T_{2n}(e^{it}) := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}),$$

тоді

$$\tilde{T}_{2n}(e^{it}) := -i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (c_k e^{ikt} - c_{-k} e^{-ikt}).$$

Далі розглянемо вираз

$$T'_{2n}(e^{it}) + i\tilde{T}'_{2n}(e^{it}).$$

Очевидно, що

$$T'_{2n}(e^{it}) + i\tilde{T}'_{2n}(e^{it}) = i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (kc_k e^{ikt} - kc_{-k} e^{-ikt}) +$$

$$+ i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k (kc_k e^{ikt} + kc_{-k} e^{-ikt}) = 2i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k kc_k e^{ikt}.$$

Тому

$$2 \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} r^k kc_k e^{ikt} \right\|_1 \leq \|T'_{2n}(e^{it})\|_1 + \|\tilde{T}'_{2n}(e^{it})\|_1.$$

Застосуємо до правої частини останнього співвідношення нерівності Бернштейна [4, с. 23]. При цьому будемо мати

$$\|T'_{2n}(e^{it})\|_1 + \|\tilde{T}'_{2n}(e^{it})\|_1 \leq 4n \|T_{2n}(e^{it})\|_1.$$

Тобто

$$2 \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k kc_k e^{ikt} \right\|_1 \leq$$

$$\leq 4n \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1. \quad (17)$$

Аналогічно, на основі рівності

$$-2i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k kc_{-k} e^{-ikt} = v_{2n}'(F_r; e^{it}) - S'_n(F_r; e^{it}) -$$

$$-i(\tilde{v}_{2n}'(F_r; e^{it}) - \tilde{S}'_n(F_r; e^{it})) =: T'_{2n}(e^{it}) - i\tilde{T}'_{2n}(e^{it}),$$

отримуємо

$$2 \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_{-k} e^{-ikt} \right\|_1 \leq \|T'_{2n}(e^{it})\|_1 + \|\tilde{T}'_{2n}(e^{it})\|_1.$$

Застосовуючи нерівності Бернштейна [4, с. 23] до правої частини останнього співвідношення, знайдемо

$$\begin{aligned} & 2 \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_{-k} e^{-ikt} \right\|_1 \leq \\ & \leq 4n \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Застосовуючи до многочлена

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_k z^k$$

нерівність Харді [3, с. 454], матимемо

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_k e^{ikt} \right\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_k e^{i(k-n)t} \right\|_1 = \\ & = \left\| \sum_{\nu=1}^n \frac{n-\nu+1}{n+1} r^{n+\nu} (n+\nu) c_{n+\nu} e^{i\nu t} \right\|_1 \geq \\ & \geq C \sum_{\nu=1}^n \frac{(n-\nu+1) r^{n+\nu} (n+\nu) |c_{n+\nu}|}{(n+1)\nu} \geq \\ & \geq Cn \sum_{\nu=1}^n \frac{|c_{n+\nu}|}{\nu} r^{n+\nu} - C \sum_{\nu=1}^n |c_{n+\nu}| r^{n+\nu} = Cn \sum_{\nu=1}^n \frac{|c_{n+\nu}|}{\nu} r^{n+\nu} + n o(1), \end{aligned} \quad (19)$$



оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n |c_{n+\nu}| r^{n+\nu} = 0.$$

Зі співвідношень (17) і (19) випливає, що

$$\begin{aligned} 2n \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 &\geq \\ &\geq Cn \sum_{\nu=1}^n \frac{|c_{n+k}|}{k} r^{n+k} + n o(1). \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогічно до того, як було одержано нерівність (19), із формули (18) знаходимо

$$\begin{aligned} 2n \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 &\geq \\ &\geq \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k k c_{-k} e^{-i(k-n)t} \right\|_1 = \\ &= \left\| \sum_{\nu=1}^n \frac{n-\nu+1}{n+1} r^{n+\nu} (n+\nu) c_{-n-\nu} e^{i\nu t} \right\|_1 \geq \\ &\geq C \sum_{\nu=1}^n \frac{(n-\nu+1) r^{n+\nu} (n+\nu) |c_{-n-\nu}|}{(n+1)\nu} \geq \\ &\geq Cn \sum_{\nu=1}^n \frac{|c_{-n-\nu}|}{\nu} r^{n+\nu} + n o(1). \end{aligned} \quad (21)$$

Ліві частини співвідношень (20) і (21) однакові, тому, додаючи їх, отримаємо

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 \geq$$

$$\geq C \sum_{k=1}^n \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} r^{n+k} + o(1). \quad (22)$$

Отже

$$\begin{aligned} \|f(e^{it}) - S_n(f; e^{it})\|_1^* &= \lim_{r \rightarrow 1} \|v_{2n}^n(F_r; e^{it}) - S_n(F_r)\|_1 + o(1) = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} r^k (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) \right\|_1 \geq \\ &\geq C \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} r^{n+k} + o(1) = \\ &= C \sum_{k=1}^n \frac{|c_{n+k}| + |c_{-n-k}|}{k} + o(1). \end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає твердження теореми 1.

У випадку, якщо  $c_{-k} = 0$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots$ , тобто коли функція  $f(z)$  аналітична в області  $D = \{z : |z| < 1\}$  і ряд (10) стає рядом Тейлора функції  $f(z)$ , теорема 1 дає необхідну умову збіжності в середньому рядів Тейлора функцій із класу Харді  $H_1$ .

У роботі [2] доведено, що коли коефіцієнти  $a_k$  ряду (3) утворюють нуль-послідовність, яка задовольняє умову (5), то для збіжності в середньому ряду (3) необхідно і достатньо виконання співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |a_{n+k}| = 0. \quad (23)$$

Там же встановлено, що якщо коефіцієнти  $b_k$  ряду (4) утворюють нуль-послідовність, яка задовольняє умову (5), то для збіжності в середньому ряду (4) необхідно і достатньо виконання співвідношень (5) і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |b_{n+k}| = 0. \quad (24)$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (25)$$

Нехай  $c_k = a_k - ib_k$  – коефіцієнти ряду (25) і  $\{a_k\}, \{b_k\}$  – нуль-послідовності, які належать множині  $B - T$ , тобто задовольняють умови (5) і (6). Відділяючи дійсну і уявну частини в ряді (25) при  $z = e^{ix}$ , будемо мати два тригонометричні ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx).$$

Оскільки коефіцієнти цих рядів належать множині  $B - T$ , то, згідно з результатами С. О. Теляковського [8], ці тригонометричні ряди є рядами Фур'є деяких сумовних функцій, які позначимо відповідно  $g(x)$  і  $\tilde{g}(x)$ . Ці функції є спряженими функціями.

Добре відомо [3, с. 453], що в цьому випадку, тобто коли  $g(\cdot) \in L$  і  $\tilde{g}(\cdot) \in L$ , степеневий ряд (25) є рядом Тейлора функції  $f(z) \in H_1$ ,  $z \in D$ , де  $f(e^{ix}) = g(x) + i\tilde{g}(x)$ .

Враховуючи співвідношення (23) і (24), а також нерівність  $2|c_k| \geq |a_k| + |b_k|$ , маємо наступні твердження.

**Теорема 2.** *Нехай  $c_k = a_k - ib_k$  – коефіцієнти ряду (25) і  $\{a_k\}, \{b_k\}$  – нуль-послідовності, які належать множині  $B - T$ , тоді ряд (25) буде рядом Тейлора функції  $f(z) \in H_1$ ,  $z \in D$ , і для збіжності ряду (25) в середньому необхідно і достатньо виконання співвідношення*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{|c_{n+k}|}{k} = 0. \quad (26)$$

**Теорема 3.** *Нехай  $c_k = a_k - ib_k$  – коефіцієнти ряду (25) і  $\{a_k\}, \{b_k\}$  – нуль-послідовності, які належать множині  $B - T$ , тоді для обмеженості частинних сум ряду (25) необхідно і достатньо виконання співвідношення*

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |c_{n+k}| \leq C. \quad (27)$$

Автори виражають щирю вдячність доктору фізико-математичних наук В.В. Савчуку за пропозицію розглянути клас функцій  $CS$  і певну допомогу при одержанні результатів.

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. — М. : Физматгиз, 1961. — 936 с.
2. Задерей П. В. О сходимости в среднем рядов Тейлора и Лорана / П. В. Задерей, Б. А. Смаль, Р. В. Товкач // Экстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання : пр. Ін-ту математики НАН України. — К., 2003. — Т. 1, № 1. — С. 307—314.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: в 2-х т. / Антони Зигмунд ; пер. с англ. О. С. Ивашева-Мусатова ; под ред. Н. К. Бари. — М. : Мир, 1965. — Т. 1. — 615 с.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2-х т. / Антони Зигмунд ; пер. с англ. О. С. Ивашева-Мусатова ; под ред. Н. К. Бари. — М. : Мир, 1965. — Т. 2. — 537 с.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций / И. И. Привалов — М. : Наука, 1950. — 336 с.
6. Степанец А. И. Методы теории приближения : в 2-х ч. / А. И. Степанец. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2 — 468 с.
7. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин — М. : Наука, 1984. — 336 с.
8. Теляковский С. А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье / С. А. Теляковский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т. 28, № 6. — С. 1209—1236.
9. Тумаркин Г. Ц. Об интегралах типа Коши-Стилтьеса / Г. Ц. Тумаркин // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, № 4. — С. 163—166.
10. Шведченко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре / С. В. Шведченко // Мат. анализ (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). — 1985. — Т. 23, № 3. — 124 с.
11. Belinskii E. S. Strong summability of Fourier series of thr periodic functions from  $H^p$ ,  $(0 < p \leq 1)$  / E. S. Belinskii // Constr. Approx. — 1996. — V. 12, № 6. — P. 187—195.
12. Smith B. A strong convergence theorem for  $H^1(T)$  / B. Smith // P. 169—173.