

УДК 7.012: 001.891

Т.І. НІКОЛАЄВА

Київський національний університет технології та дизайну

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ МОТОРИКИ ДІТЕЙ ДЛЯ  
ЦІЛЕЙ ПІДВИЩЕННЯ ЕРГОНОМІЧНОСТІ ДИТЯЧОГО ОДЯГУ**

У статті розглянуто нові принципи підходу до оцінки ергономічної відповідності дитячого одягу шляхом проведення статистичного аналізу розвитку моторики дітей різних вікових груп та побудови математичної моделі залежності показника моторики дитини від її віку, що надає можливість оптимального урахування рухової активності дитини в проектуванні одягу.

**Ключові слова:** математичне моделювання, ергономіка, моторика, статистичний аналіз, математична модель, динаміка, диференціальне рівняння, логістична модель.

Використання прийнятих в біоніці методів функціональних аналогій, що визначають закономірності та ступінь корелятивності форм та функцій природних об'єктів та предметів проектної діяльності, у створенні ергономічно відповідного одягу для дітей, доводить необхідність узгодження проектних параметрів з рівнем розвитку моторики дитини.

Статистичний аналіз розвитку динаміки рухової активності дітей різних вікових груп визначив, що вона має ділянки прискороного, помірнього та уповільненого росту, а варіабельність показника кількості рухів збільшується з віковими інтервалами.

Визначення динаміки розвитку кількості рухів дітей потребує використання математичної моделі досліджуваного явища. Математичне моделювання залежності показника моторики дітей від їх віку, з метою визначення періодів найбільш активного розвитку, сприятиме розробці оптимальних форм та тектонічної побудови ергономічно відповідного, зручного дитячого одягу.

**Об'єкти та методи дослідження**

В [1] зазначалась необхідність удосконалення методів проектування дитячого одягу з метою підвищення його ергономічних властивостей. Однією з основних вимог до дизайну дитячого одягу є його узгодженість з розвитком моторики дітей відповідних вікових груп. В [1] представлено результати статистичного аналізу даних проведених вибіркового досліджень залежності моторної активності нормально розвинених дітей від належності до певної вікової групи. В табл. 1 подано узагальнені дані з [1] щодо залежності кількості освоєних видів рухів від віку дітей.

Таблиця 1. Розподіл за віковими групами кількості видів рухів, освоєних дітьми

(авторська розробка)

№ групи	Початковий вік, Місяців	Кінцевий вік, місяців	Середній вік, місяців	Медіана кількості освоєних видів рухів	Оцінка похідної
1	2	3	4	5	6
1	0	6	3	3	—
2	7	24	15	8	0.42
3	25	36	30	16	0.54
4	37	66	51	28	0.61
5	67	114	90	34	0.13
6	115	192	153	37	0.02

В шостому стовпчику табл. 1 подано оцінки похідної функції залежності медіани кількості видів

рухів, освоєних дітьми, від середнього віку дітей в групі. Ці оцінки визначено за формулою:

$$\frac{dN}{dt} \approx \frac{N(t_k) - N(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, k = 2, \dots, 6, \quad (1)$$

де:  $t_k, k = 1, \dots, 6$  – середній вік дітей  $k$ -ї вікової групи;

$N(t)$  – функція залежності медіани<sup>1</sup> кількості видів рухів, освоєних дітьми, від їх віку;

Точкову діаграму залежності похідної кількості видів рухів, освоєних дітьми, від їх віку, побудовану за даними табл. 1, подано на рис. 1.

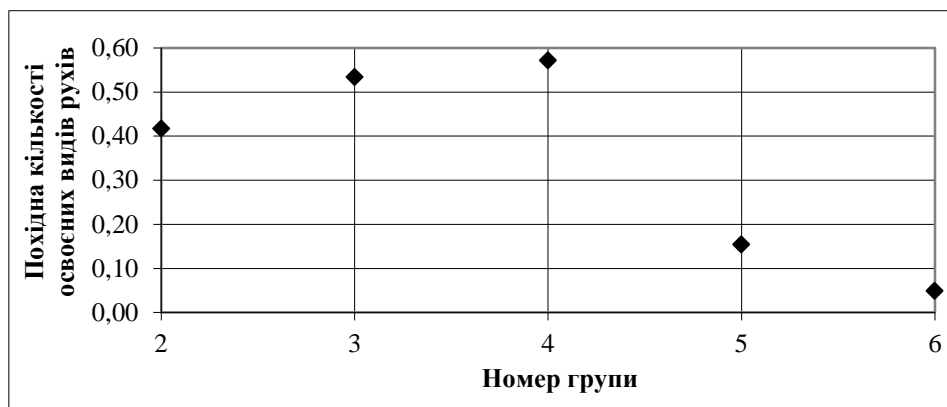


Рис. 1. Діаграма похідної кількості видів рухів, освоєних дітьми  
(авторська розробка)

З аналізу діаграми на рис. 1 випливає, що функція  $N = N(t)$  є зростаючою – її похідна на всьому інтервалі змін аргументу є додатною. Крім того, ця функція має ділянки – прискореного росту (похідна зростає), помірною і уповільненого росту (похідна спадає). Перехід від прискореного до уповільненого росту (точка перегину) має місце у віковому інтервалі [30, 40] місяців. Більш точно цей вік буде визначено нижче на основі побудованої математичної моделі.

Точкову діаграму залежності кількості видів рухів, освоєних дітьми, від їх віку, побудовану за даними табл. 1, подано на рис. 2.

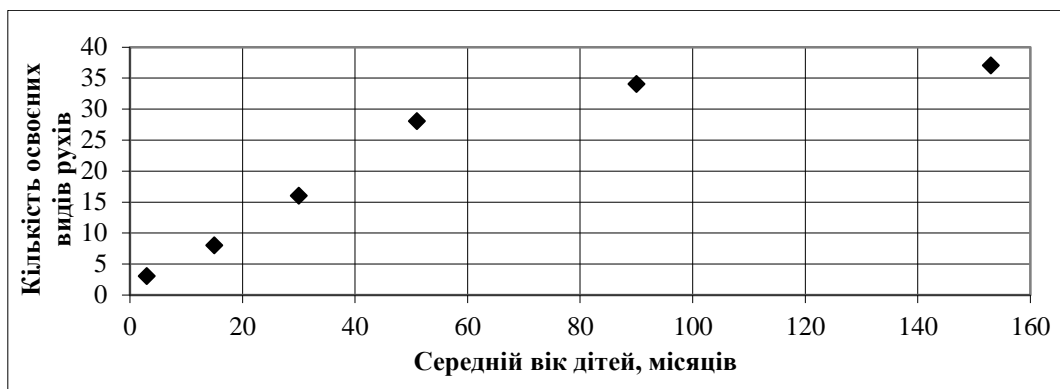


Рис. 2. Діаграма залежності кількості видів рухів, освоєних дітьми, від їх віку  
(авторська розробка)

<sup>1</sup> В подальшому медіана використовуватиметься за умовчанням в якості оцінки кількості видів рухів, освоєних дітьми певної вікової групи. Для спрощення викладу далі сам термін «медіана» опускатиметься.

Для подальших досліджень, зокрема, для оцінювання досліджуваного показника моторики дітей довільної вікової групи або довільного віку, необхідно побудувати відповідну математичну модель. Ця модель має відображати описані вище особливості залежності. Проведений аналіз публікацій з питань проектування дитячого одягу дозволяє стверджувати, що таке моделювання виконано вперше.

#### **Постановка завдання**

Виходячи з результатів аналізу, проведеного в [1], а також з аналізу діаграм на рис. 1–2, математична модель залежності кількості видів рухів, освоєних дитиною, від її віку має задовольняти наступним вимогам:

2.1. Математичною моделлю даного явища має бути функція, що монотонно зростає з дорослішанням дитини.

2.2. Модель має враховувати твердження, сформульоване в [1] і підтвержене в п. 1 даної статті: «...динаміка кількості рухів дітей має дві ділянки – прискореного росту і уповільненого росту. Це явище можна пояснити таким чином. Середньостатистична доросла людина має певний ресурс моторики – вона виконує не більше 40 основних видів рухів. Діти малого віку мають значний резерв розвитку і збільшують зі збільшенням віку кількість освоєних видів рухів прискорено. З наближенням віку дитини до віку дорослої людини зростання кількості освоєних нею рухів уповільнюється з тим, щоб врешті досягнути зазначеної границі – близько 40 рухів» [1].

2.3. Відповідна функція залежності має мати точку перегину всередині вікового інтервалу [30, 40] місяців (див. рис. 1–2).

#### **Результати та їх обговорення**

Для побудови математичної моделі запишемо диференціальне рівняння, що відображає (в один із можливих способів) вимоги 2.1–2.3:

$$\frac{dN}{dt} = kN \cdot \left[ 1 - \frac{N}{a} \right], \quad (1)$$

де  $k, a$  – параметри рівняння.

За умови  $N < a$ , маємо  $\frac{dN}{dt} > 0$ , тобто функція  $N = N(t)$  є монотонно зростаючою.

При малих віках дітей маємо:

$$1 - \frac{N}{a} \approx 1, \quad (2)$$

тобто:

$$\frac{dN}{dt} = kN. \quad (3)$$

Звідси випливає, що для дітей малого віку має місце експоненціальний ріст кількості освоєних ними видів рухів.

З іншого боку, якщо вік дитини  $t$  зростає до такого значення, що кількість освоєних видів рухів наближається до  $a$ , то, згідно (1), похідна функції наближається до нуля, тобто швидкість зростання функції зменшується і, таким чином, кількість освоєних видів рухів прямує до певного сталого значення.

Для розв'язання диференціального рівняння (1) виконаємо ряд еквівалентних перетворень, а саме:

$$a \frac{dN}{N(a-N)} = kdt, \quad (4)$$

$$\left( \frac{1}{N} + \frac{1}{a-N} \right) dN = kdt. \quad (5)$$

Рівняння (5) має відокремлені змінні, тому:

$$d \left( \ln \frac{N}{a-N} \right) = d kt, \quad (6)$$

$$\frac{N}{a-N} = Ce^{kt}, \quad (7)$$

де  $C$  – довільна константа. Для визначення константи  $C$  припустимо, що новонароджена (якщо  $t = 0$ ), дитина володіє певною кількістю видів рухів  $N_0$ . Виходячи з даної початкової умови, отримуємо:

$$C = \frac{N_0}{a - N_0}. \quad (8)$$

Насамкінець, з урахуванням (7) і (8), отримуємо остаточну формулу залежності між досліджуваними величинами:

$$N(t) = \frac{aN_0e^{kt}}{a - N_0 + N_0e^{kt}} = \frac{a}{1 + \frac{a - N_0}{N_0}e^{-kt}}. \quad (9)$$

Позначивши  $b = \frac{a - N_0}{N_0}$ , отримуємо рівняння у вигляді:

$$N(t) = \frac{a}{1 + be^{-kt}}. \quad (10)$$

Не складно показати, що математична модель (10) задовольняє вимогам 2.1–2.3.

В літературі рівняння такого типу називають логістичною функцією (логістою) [2, 3], рівнянням Верхульста [4] або рівнянням Перла-Ріда [3].

В [4] представлено результати порівняльного аналізу чотирьох методів оцінювання параметрів моделі (10). Там же за результатами обчислювальних експериментів зроблено висновок, що найвищу точність чисельного моделювання забезпечує використання методу Левенберга-Марквардта [5, 6] для мінімізації середньоквадратичної похибки апроксимації. У програмному комплексі PAST [7], що вільно розповсюджується, реалізовано два методи розрахунку параметрів логістичної моделі – метод лінеаризації з подальшим застосуванням лінійного методу найменших квадратів і метод Левенберга-Марквардта безпосередньо для нелінійного методу найменших квадратів. Для аналізу результатів моделювання і виконання всіх інших розрахунків в КНУТД розроблено алгоритмічною мовою

ObjectPascal [8] програму MOTILITY. Результати розрахунків за програмами PAST і MOTILITY подано в табл. 2.

Таблиця 2. Результати розрахунку параметрів логістичної моделі кількості видів рухів, освоєних дітьми  
(авторська розробка)

Середній вік дитини, місяців	Спостережена кількість видів освоєних рухів	Метод розрахунку			
		Лінеаризації		Левенберга-Марквардта	
		$N t = \frac{37.04}{1 + 9.817e^{-0.05897t}}$		$N t = \frac{36.63}{1 + 7.837e^{-0.05912t}}$	
		Розрахована кількість видів освоєних рухів	Абсолютна похибка моделі	Розрахована кількість видів освоєних рухів	Абсолютна похибка моделі
3	3	4.02	1.02	4.84	1.84
15	8	7.33	0.67	8.66	0.66
30	16	13.85	2.15	15.72	0.28
51	28	24.94	3.06	26.46	1.54
90	34	35.32	1.32	35.28	1.28
153	37	37.00	0.00	36.60	0.40
<b>Середня</b>			<b>1.37</b>		<b>1.00</b>

На рис. 3 представлено в графічному вигляді досліджувану залежність для трьох варіантів: фактичних спостережень і розрахованих значень за моделлю (10) з параметрами, обчисленими за методами лінеаризації і Левенберга-Марквардта.

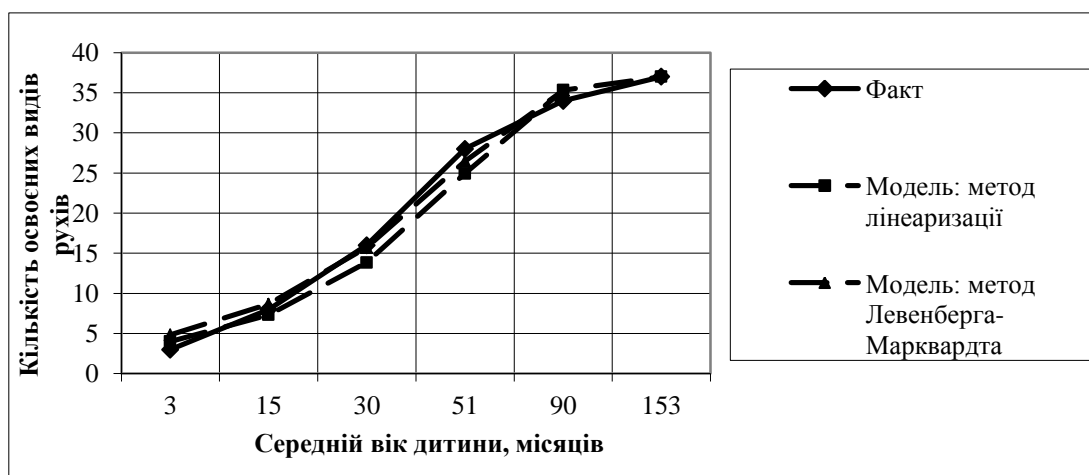


Рис. 3. Порівняльні графіки фактичних і модельованих значень кількості видів рухів, освоєних дітьми  
(авторська розробка)

З аналізу табл. 2 випливає наступне:

а) Порівняно з моделлю, параметри якої розраховано за методом лінеаризації, суттєво точнішою є модель, параметри якої розраховано за методом Левенберга-Марквардта. Середня абсолютна похибка цієї моделі становить 1 вид рухів. Така точність моделювання є цілком достатньою для даного дослідження.

б) Асимптотою, до якої прямує кількість рухів дитини зі збільшенням її віку, є 37 рухів. Знання значення даного параметра дозволяє запропонувати до використання відносний показник кількості освоєних дитиною видів рухів — індекс моторики, що обчислюється за формулою:

$$0 < i_m t = \frac{N t}{a} = \frac{1}{1 + be^{-kt}} \leq 1. \quad (11)$$

В табл. 3 в якості прикладу представлено індекси моторики дітей з середнім віком кожної групи.

Таблиця 3. **Індекси моторики дітей**  
(авторська розробка)

№ групи	Середній вік, місяців	Медіана кількості освоєних видів рухів	Індекс моторики
1	4	5	0.08
2	15	8	0.22
3	30	16	0.43
4	51	28	0.76
5	90	34	0.92
6	153	37	1.00

### **Висновки**

а) Проаналізовано характер залежності показника моторики дитини від її віку, визначено основні вимоги, яким має відповідати математична модель явища.

б) Побудовано математичну модель залежності показника моторики дитини від її віку. Ця модель представляє диференціальна рівняння, розв'язком якого є логістична функція.

в) Оцінювання параметрів моделі здійснено нелінійним методом найменших квадратів з використанням алгоритму Левенберга-Марквардта. Середня абсолютна похибка моделювання становить 1 вид рухів.

г) Наступні дослідження мають бути спрямовані на використання розробленої математичної моделі для розв'язання відповідних практичних задач, що мають місце в процесі проектування ергономічного дитячого одягу.

## Список використаної літератури

1. Николаева Т.И. Анализ развития моторики детей для целей повышения эргономичной jakości дитячого одягу.
2. A.Tsoularis. Analysis of Logistic Growth Models. // Res. Lett. Inf. Math. Sci. – 2001. – №2. – P.23-46.
3. Т.А. Дуброва. Статистические методы прогнозирования в экономике. – М.: Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права. – 2003. – 25 с.
4. Семенычев В.К. Кожухова В.Н., Семенычев Е.В. Методы идентификации логистической динамики и жизненного цикла продукта моделью Верхулста. // Экономика и математические методы. – 2012. – №1. – С. 108-115.
5. Й.Бард. Нелинейное оценивание. – М.: Статистика. – 1975. – С. 98-101.
6. Ф.Гилл, У.Мюррей, М.Райт. Практическая оптимизация. – М.: Мир. – 1985. – С. 188-189.
7. Øyvind Hammer. PAST. Version 2.16. Reference manual. / Øyvind Hammer. Oslo: Natural History Museum University of Oslo, 1999-2012. – 227 p.
8. Епанешников А.М., Епанешников В. А. DELPHI 5. Язык Object Pascal – М.: Диалог-МИФИ, 2000. – 381 с.

Стаття надійшла до редакції / Article received: 04.07.2013

Рецензент: д.т.н., проф., зав. каф. інформаційних технологій проектування КНУТД Щербань В.Ю.

**Математическое моделирование развития моторики детей для целей повышения эргономичности детской одежды**

Николаева Т.И.

*Киевский национальный университет технологий и дизайна*

В статье рассмотрены новые принципы подхода к оценке эргономического соответствия детской одежды путем проведения статистического анализа развития моторики детей разных возрастных групп и построения математической модели зависимости показателя моторики ребенка от его возраста, что дает возможность оптимального учета двигательной активности ребенка в проектировании одежды.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, эргономика, моторика, статистический анализ, математическая модель, динамика, дифференциальное уравнение, логистическая модель.

**The mathematical modeling of the development of children motility for the purpose of improving ergonomics of children's clothes**

Nikolayeva T.

*Kyiv national university of technologies and design*

The article describes a new approach to evaluation of ergonomic conformity of children's clothes by statistical analysis of the development of children motility in different age group. The constructin of mathematical model of index of child motility depending of his age, which makes it possible to take into account the child motility in designing clothes.

**Keywords:** mathematical modeling, ergonomics, motility, statistical analysis, mathematical model, differential equation, dynamics, logistic model.