УДК 677.055.621

БЕРЕЗІН Л.М.
Київський національний університет технологій та дизайну

ДО РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЇ

Мета. *Приведення довільного закону розподілення випадкових величин максимальних навантажень до середнє зваженої суми декількох нормальних законів для спрощення подальшого визначення ймовірності безвідмовної роботи конструкції в класичній постановці.*

Методика. *Використано сучасний метод розрахунку надійності конструкції, який базується на теорії випадкових величин, що представлені у виді детермінованих функцій часу. Отримання параметрів функції розподілення випадкової величини ударного навантаження, яке не підпорядковується нормальному закону розподілення, базується на положеннях теорії ймовірностей та математичної статистики, визначення ймовірності безвідмовної роботи – на операції згортки незалежних випадкових величин.*

Результати. *Встановлено розрахункові залежності, використання яких дозволяє за вихідними параметрами розподілень випадкових значень ударних навантажень та характеристик міцності матеріалу обчислювати математичне сподівання та середнє квадратичного відхилення еквівалентного закону розподілення. Запропоновано положення розв'язку перевірної задачі по визначенню ймовірності безвідмовної роботи конструкції, що дозволяє проаналізувати на стадії проектування вплив геометричних параметрів небезпечного перерізу конструкції на заданий рівень її надійності.*

Наукова новизна. *Можливість використання в розрахунках надійності конструкцій довільного закону розподілення випадкової величини, відмінного від загальноприйнятого нормального або інших класичних законів.*

Практична значимість. *Представлено графоаналітичний спосіб визначення параметрів законів розподілення випадкових величин, які не підпорядковуються нормальному закону, що значно спрощує виконання їх в розрахунках надійності.*

Ключові слова: *графоаналітичний спосіб, закон розподілення, квантиль, операція згортки, проектна задача*

Вступ. Розрахунок елементів конструкцій з заданою надійністю в класичній постановці, коли навантаження та характеристика міцності матеріалу підпорядковуються нормальному закону розподілення, носить тривіальний характер та висвітлено в достатній кількості літературних та довідкових джерел. Теж саме стосується різних комбінацій інших відомих законів розподілення (Вейбула, логарифмічно нормального, гама-розподілення тощо), для яких представлено в закінченій формі формули для визначення точкових оцінок показників надійності [1]. В роботі [2] на основі адаптованої до в'язального механізму панчішно-шкарпеткового автомату динамічної моделі отримано залежності для розрахунку максимальних ударних навантажень F в робочих органах при взаємодії з клинами замкової системи, які чисельно-аналітичним методом з застосуванням математичного експерименту представлено виразами в поліноміальній формі для застосування математичного апарату функцій випадкових аргументів, що найбільше відповідає опису фізичної суті динамічних процесів. Встановлено [3], що нелінійні рівняння опису випадкових значень максимального ударного навантаження F голок в системі клин-голка-паз панчішно-шкарпеткового автомату в залежності від силу опору F_o руху голки в пазу як функції випадкового аргументу не підпорядковуються нормальному або іншому класичному закону розподілення. Для визначення щільності розподілення ймовірностей неперервної випадкової величини F використовували вираз

$$p(F) = p[q(F)]\cdot|q'(F)|,$$

де $q(F)$, $q'(F)$ – функція, яка обернена функції $F = f(F_o)$ та її похідна. Однак для отримання таким чином $p(F)$ не можна запропонувати уніфікований метод, а складені залежності є малоінформативними та незручними для практичного використання.

Постановка завдання. Метою даної роботи є приведення розподілення випадкових величин, наприклад, максимальних навантажень, будь-якої форми до середнє зваженої суми декількох нормальних законів. Це дозволить перейти до загально прийнятої постановки класичної задачі надійності та отримувати прості замкнуті розв'язки з достатнім для практики рівнем точності. Для вирішення поставленого завдання в загальному випадку для n складових нормальних розподілень необхідно за їх параметрами обчислювати відповідні параметри для вихідного сумарного закону.

Результати та їх обговорення. Важливою ланкою в розрахунках деталей на надійність за будь-яким критерієм міцності є наявність законів розподілу навантажень $ð_1(F)$, що діють на конструкцію, та характеристик міцності її матеріалу $ð_2(R)$, при розгляді їх як випадкових величин. Відомо, що умовою руйнування конструкції є перевищення максимальних діючих напружень σ_{max} (надалі в законах розподілу позначаємо S) над граничним напруження σ_{lim} (позначаємо R), що витримує конструкція, тобто

$$Z = R - S < 0\,. \tag{1}$$

Очевидно, що в залежності від матеріалу та діючих навантажень під граничним напруження σ_{lim} розуміємо границі текучості $\sigma_{Ò}$, міцності $\sigma_{Â}$, втомленості деталі при симетричному навантаженні $\sigma_{-1Ä}$ тощо).

У випадках, коли R та S розподілені за нормальним законом, функцію щільності випадкової величини Z знаходять з урахуванням операції згортки двох незалежних величин R та S. При цьому випадкова величина Z також розподілена за нормальним законом та може бути представлена у виді

$$Z = m_Z + u_p \sigma_Z\,, \tag{2}$$

де m_Z, σ_Z - математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення Z; u_p- квантиль нормального розподілу з відповідною ймовірністю руйнування $P_{ðóéí}$. Після обчислення за (2) $u_p = -\dfrac{m_Z}{\sigma_Z}$ за таблицями визначають ймовірності руйнування

$$P_{ðóéí} = \hat{O}(u_p)$$

або не руйнування конструкції

$$P = 1 - P_{ðóéí} = 1 - \hat{O}(u_p) = 1 - \hat{O}(-\frac{m_Z}{\sigma_z})\,,$$

де $\hat{O}(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$ - табульована функція нормального розподілення.

У випадках, коли навантаження або характеристики міцності мають закони розподілу, що відмінні від нормального або іншого класичного, ймовірність руйнування знаходять за виразом

$$P_{ðóéí} = P(R - S < 0) = \int_0^{\infty} ð(S) F_R(S) dS\,, \tag{3}$$

де $ð(S)$- щільність розподілу випадкової величини максимальних значень напруження S; $F_R(S)$ - інтегральна функція розподілу випадкової величини R, яку беруть при значенні $R = S = \sigma_{max}$, тобто $F_R(S) = F_R(\sigma_{max}) = \displaystyle\int_0^{\sigma_{max}} ð_R(R) dR$, де $ð_R(R)$- щільність розподілу величини $R = \sigma_{lim}$.

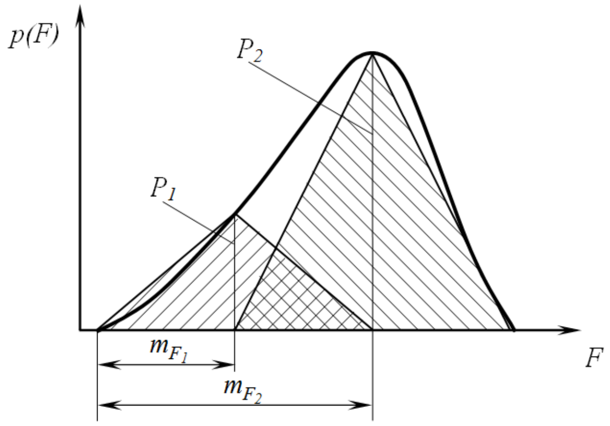
Використання виразу (3) потребує значної математичної підготовки та є незручним в практиці інженерних розрахунків.

Тому пропонується підхід заміни з деяким наближенням закону розподілення будь-якої форми середньо зваженою сумою декількох нормальних законів. Використовуємо положення, які викладені в [4], стосовно закону розподілення навантажень. Представляємо $ð_1(F)$ сумою n нормальних розподілень $ð_i^{íîð}(F_з)$, для яких еквівалентний закон має вид

$$\text{ð}_1^{\text{åêâ}}(F) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \text{ð}_i^{\text{íîðì}}\ (F_з), \tag{4}$$

де P_i - ймовірність наявності нормального розподілу $\text{ð}_i^{\text{íîðì}}\ (F_з)$.

Очевидно, що кожне з розподілень $\text{ð}_i^{\text{íîðì}}\ (F_з) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Fi}} exp\left[-\dfrac{(F_i - m_{Fi})^2}{2\sigma_{Fi}^2} \right]$ характеризується відповідними значеннями математичного сподівання m_{F_i} та середнє квадратичним відхиленням $\sigma_{F\,i} = \sqrt{D_{F_i}}$, де D_{F_i} - дисперсія, тобто $\text{ð}_i^{\text{íîðì}}\ (m_{Fз}; \sigma_{F\,з})$.Для отримання складових нормальних законів, які утворюють заданий закон розподілення навантаження $\text{ð}_1^{\text{åêâ}}(m_F; \sigma_F)$, використовуємо графоаналітичний спосіб. Для спрощення сприйняття розглядаємо випадок $n=2$ з складовими $\text{ð}_1^{\text{íîðì}}\ (m_{F1}; \sigma_{F1})$ та $\text{ð}_2^{\text{íîðì}}\ (m_{F2}; \sigma_{F2})$). Задану криву розподілення розбиваємо на рівнобічні трикутники за вимогою, щоб при додаванні відповідних їм абсцис отримували криву, яка найбільш наближена до заданої (на рис. трикутників два). Такий підхід обумовлений тим, що трикутне розподілення найбільш точно може замінювати нормальний закон з однаковою дисперсією. При розподіленні за рівнобічним трикутником з основою $2m_{Fi}$ дисперсія обчислюється за формулою $D_{Fi} = (m_{Fi})^2 / 6 = (m_{F1})^2 / 6$, оскільки $m_{F1} = 0{,}5 m_{F2}$.



В загальному випадку при n складових нормальних розподіленнях за їх параметрами відповідні параметри для вихідного закону мають вид

$$m_F = \sum_{i=1}^{n} m_{Fi} \cdot P_i \quad \text{та} \quad D_F = \sum_{i=1}^{n} (D_{Fi} + m_{Fi}^2) P_i - m_F^2 . \tag{5}$$

Відповідно при $n = 2$ $\quad m_F = m_{F1} \cdot P_1 + m_{F2} \cdot P_2$;

$$D_F = (D_{F1} + m_{F1}^2) P_1 + (D_{F2} + m_{F2}^2) P_2 - m_F^2, \tag{6}$$

де значення m_{Fi} та P_i встановлюють за рисунком, причому $P_i = A_i / \sum_{i=1}^{n} A_i$, де A_i - площа i- го трикутника.

У відповідності до (4) маємо

$$\text{ð}_1^{\text{åêâ}}(m_F; \sigma_F) = P_1 \cdot \text{ð}_1^{\text{íîðì}}\ (m_{F1}; \sigma_F) + P_2 \cdot \text{ð}_1^{\text{íîðì}}\ (m_{F2}; \sigma_F), \tag{7}$$

тобто приведення до нормальних законів розподілення з середнє квадратичним відхиленням $\sigma_{F\,i} = \sqrt{D_{Fi}} = \sigma_{F1} = \sigma_{F2} = \sigma_F$.

При переході від закону розподілення максимальних навантажень $\text{ð}_1(F)$ до закону розподілення максимальних напружень $\text{ð}_2(S)$ використовуємо залежність $S = K \cdot F$, де K - коефіцієнт, який враховує розміри небезпечного перерізу конструкції.

Тоді $$f_2(S) = f_2^{\text{îðì}}(m_S;\sigma_S) = f_1(K \cdot F) = P_1 f_1^{\text{îðì}}(K \cdot m_{F1}; K \cdot \sigma_{F1}) + $$
$$+ P_2 f_1^{\text{îðì}}(K \cdot m_{F2}; K \cdot \sigma_{F2}) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot f_1^{\text{îðì}}(K \cdot m_{Fi}; K \cdot \sigma_F) \qquad (8)$$ при умові $\sigma_{F1} = \sigma_{F2} = \sigma_F$. Вважаємо, що випадкові значення граничного напруження матеріалу R підпадають під нормальний закон виду $\text{ð}_3(R) = \text{ð}_3(m_R, \sigma_R)$. Тоді для різниці $Z = R - S$ можна отримати

$$\text{ð}_3(Z) = \text{ð}_3(m_Z;\sigma_Z) = \sum_{i=1}^{n} P_i^Z \cdot \text{ð}_3^{\text{îðì}}(m_{Zi};\sigma_{Zi}) = P_1 \text{ð}_3^{\text{îðì}}(m_{Z1};\sigma_{Z2}) + P_2 \text{ð}_3^{\text{îðì}}(m_{Z2};\sigma_{Z2}), \qquad (9)$$

де $\sigma_Z = \sqrt{D_Z}$ при $D_Z = \sum_{i=1}^{n} P_i(D_{Zi} + m_{Zi}^2) - m_Z^2 = P_1(D_{Z1} + m_{Z1}^2) + P_2(D_{Z2} + m_{Z2}^2) - m_Z^2$; $P_i^Z = P_i$, оскільки $P_j^R = 1$. За формулою $m_{Zi} = m_R - K \cdot m_{Fi}$ маємо $m_{Z1} = m_R - K \cdot m_{F1}$, $m_{Z2} = m_R - K \cdot m_{F2})$ та відповідно $m_Z = \sum_{i=1}^{n} P_i m_{Zi} = P_1 m_{Z1} + P_2 m_{Z2}$.

При підстановці в формулу (2) розрахованих значень m_Z та σ_Z розв'язують перевірну задачу по визначенню ймовірності безвідмовної роботи конструкції за одним із критеріїв міцності. Задачею проектного розрахунку при наперед заданій ймовірності безвідмовної роботи є обчислення коефіцієнту K, через який визначають геометричні параметри небезпечного перерізу конструкції.

Висновки. Запропоновано спрощений підхід до складання закону розподілення навантажень, що не підпорядковуються нормальному закону, який полягає в заміні його середнє зваженою сумою декількох нормальних законів. Наведено формули для визначення математичного сподівання та середнє квадратичного відхилення еквівалентного закону розподілення.

Представлено практичні рекомендації та розрахункові залежності, використання яких дозволяє на всіх етапах проектування за параметрами розподілень значень навантажень та характеристик міцності матеріалу проаналізувати вплив геометричних розмірів конструкції на заданий рівень надійності. Запропонована математична підтримка прийняття конструкторських рішень сприяє суттєвому скороченню термінів та підвищенню якості проектування механічних систем.

Вважаємо перспективним використання представлених матеріалів при створенні банку даних та керівних документів єдиної інформаційної системи про надійність.

Список використаної літератури

1. Хазов Б.Ф., Дидусев Б.А. Справочник по расчету надежности машин на стадии проектирования. - М.: Машиностроение. – 1986. – 224 с.
2. Березін Л.М. Оцінка довговічності та надійності в'язальних механізмів панчішно-шкарпеткових автоматів (монографія). – К.: КНУТД, 2013. – 191 с.
3. Березін Л.М. Визначення навантаженості в'язальних голок як складова розв'язку задач надійності // Вісник КНУТД, 2014, №1, С.70–74.
4. Иыуду К.А. Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. – М: Энергия, 1966. – 194 с.

К РАСЧЕТУ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИИ

БЕРЕЗИН Л.Н.
Киевский национальный университет технологий и дизайна

Цель. Приведение произвольного закона распределения случайных величин максимальных нагрузок к средне взвешенной сумме нескольких нормальных законов для упрощения дальнейшего определения вероятности безотказной работы конструкции в классической постановке.

Методика. Использован современный метод расчета надежности конструкции, который основан на теории случайных величин, которые представлены в виде детерминированных функций времени. Получение параметров функции распределения случайной величины ударной нагрузки, которая не подчиняется нормальному закону распределения, базируется на положениях теории вероятностей и математической статистики, определение вероятности безотказной работы – на операции свертки независимых случайных величин.

Результаты. Установлены расчетные зависимости, использование которых позволяет по выходным параметрам распределений случайных значений ударных нагрузок и характеристик прочности материалу вычислять математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение эквивалентного закона распределения.
Предложены положения решения проверочной задачи по определению вероятности безотказной работы конструкции, что позволяет проанализировать на стадии проектирования влияние геометрических параметров опасного сечения конструкции на заданный уровень ее надежности.

Научная новизна. Возможность использования в расчетах надежности конструкции произвольного закона распределения случайной величины, который отличается от общепринятого нормального или других классических законов.

Практическая значимость. Представлен графо-аналитический способ определения параметров законов распределения случайных величин, которые не подчиняются нормальному закону, что значительно упрощает их использование в расчетах надежности.

Ключевые слова: *графо-аналитический способ, закон распределения, квантиль, операция свертки, проектная задача.*

TO DETERMINATION OF RELIABILITY OF CONSTRUCTION

BEREZIN L.
Kiev National University of Technologies & Design

Purpose. Bringing an arbitrary law of distribution of random variables of the maximal loadings to the average weighted sum of a few normal laws for simplification of further determination of the probability of failure-free operation work of construction in the classic raising.

Methodology. Used the modern method of calculation of construction reliability, which is based on the theory of random variables, which are presented as the determined functions of time. The receipt of parameters of function of distribution of random variables of the impact load, which does not obey the normal distribution law is based on the theory of probability and mathematical statistics, determination of the probability of failure-free operation– on the operation of convolution of independent random variables.

Findings. Installed calculation dependences, which allows on the output parameters of distributing of random variables of the impact load and strength characteristics of the material to calculate the mathematical expectation and average quadratic deviation of equivalent law of distributing. Positions of decision of verification task are offered on determination of the probability of failure-free operation, that allows to analyze on the stage of planning influence of geometrical parameters of dangerous cross section construction on the predetermined level of its reliability.

Originality. Possibility to use in the calculations of reliability of construction of arbitrary law of distribution of random variables, different from generally accepted normal or other classic laws.

Practical Value. Represented by graph-analytical method of determination of parameters of law of distribution of random variables, which does not obey the normal distribution law, that considerably simplifies their use in the calculations of reliability.

Keywords*: graph-analytical method, law of distribution, quantile, convolution operation, project task.*